

Министерство науки и высшего образования РФ
Филиал федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Майкопский государственный технологический университет»
в поселке Яблоновском

Кафедра транспортных процессов и техносферной безопасности
С.Н. ЖУРАВЛЕВА

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Прикладная механика»
для студентов всех форм обучения по специальности
20.05.01 Пожарная безопасность

п.Яблоновский
2020

УДК 621: 531

ББК 31.21я73

Ж 36

Составитель: канд. техн. наук, доцент Журавлева С.Н.

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Прикладная механика» для студентов всех форм обучения по специальности 20.05.01 Пожарная безопасность: Журавлева С.Н.; Майкоп. гос. технол. ун-т. Кафедра транспортных процессов и техносферной безопасности – Изд. Филиал Майкоп. гос. технол. ун-т в пос. Яблоновском , 2020. Режим доступа: <http://mkgtu.ru> .

Общее содержание методических указаний соответствует программе дисциплины, разработанной кафедрой транспортных процессов и техносферной безопасности и утвержденной научно - методическим советом филиала МГТУ в пос. Яблоновском. Цель настоящих методических указаний – оказать учебно - методическую помощь бакалаврам для повышения качества усвоения учебного материала и формирования устойчивых компетенций по дисциплине «Прикладная механика».

Рецензенты:

Война А.А. к.т.н., доцент кафедры наземного транспорта и механики КубГТУ

Кунина П.С. Зам. директора по НИР Филиала ФГБОУ ВО «МГТУ» в пос. Яблоновском, д.т.н., проф.

Печатается по решению научно-методической комиссии по специальности 20.05.01 Пожарная безопасность для студентов всех форм обучения Филиала ФГБОУ ВО «МГТУ» в поселке Яблоновском, протокол от 31.08.2020 №1

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1. Практическое занятие №1 «Кинематический анализ кривошипно-ползунного механизма».....	5
2. Практическое занятие №2 «Силовой расчет кривошипно-ползунного механизма».....	11
3. Практическое занятие №3 «Геометрический синтез цилиндрической зубчатой передачи».....	15
4. Практическое занятие №4 «Расчет ступенчатого бруса на прочность при растяжении-сжатии».....	19
5. Практическое занятие №5 «Расчёт на прочность и жесткость при кручении»	22
6. Практическое занятие №6 «Расчет на прочность при изгибе»	26
7. Практическое занятие №7 «Расчёт на совместное действие изгиба с кручением».....	32
Список литературы.....	36

Введение

Дисциплина «Прикладная механика» – базовая дисциплина, которая состоит из трёх частей: теории механизмов и машин и сопротивления материалов.

Теория механизмов и машин изучает наиболее общие вопросы исследования и проектирования механизмов и машин. Сопротивление материалов рассматривает вопросы расчёта элементов конструкций на прочность, жёсткость и устойчивость, которые позволяют определить безопасные размеры конструктивных элементов или допускаемую эксплуатационную нагрузку.

Изучение каждой последующей части дисциплины «Прикладная механика» опирается на теоретические и практические методы, изученные в предыдущих частях. Материалы каждой части дисциплины тесно связаны между собой и представляют единую общетехническую науку, изучающую принципы действия, расчёта и проектирования машин, механизмов и отдельных деталей.

Разработанные методические указания значительно облегчат студентам самостоятельное выполнение расчетов по изучаемому курсу. Методические указания имеют целью научить студента основам технических знаний, используемых при изучении последующих технических дисциплин. Полученные навыки студент сможет применить в решении задач и выполнении курсовой работы по дисциплине.

1 Практическое занятие №1 «Кинематический анализ кривошипно-ползунного механизма»

Задана схема кривошипно-ползунного механизма (рис. 1), состоящего из следующих звеньев: 1 – стойка (неподвижное звено); 2 – кривошип, совершающий вращательное движение относительно опоры O ; 3 – шатун,двигающийся плоскопараллельно; 4 – ползун,двигающийся возвратно-поступательно вдоль направляющей $\beta\text{-}\beta$.

Необходимо определить скорости и ускорения звеньев и точек механизма при следующих исходных данных:

- частота вращения кривошипа $n = 100 \text{ об/мин}$,
- положение кривошипа в заданный момент времени $\varphi = 45^\circ$;
- длина кривошипа $OA = R = 90 \text{ мм}$;
- длина шатуна $AB = L = 280 \text{ мм}$;
- расстояние от центра вращения кривошипа до траектории движения ползуна $e = 20 \text{ мм}$;
- направление вращения кривошипа – по часовой стрелке;
- сила полезного сопротивления $Q_{\text{ПС}} = 3,2 \text{ кН}$;
- вес ползуна $G = 180 \text{ Н}$.

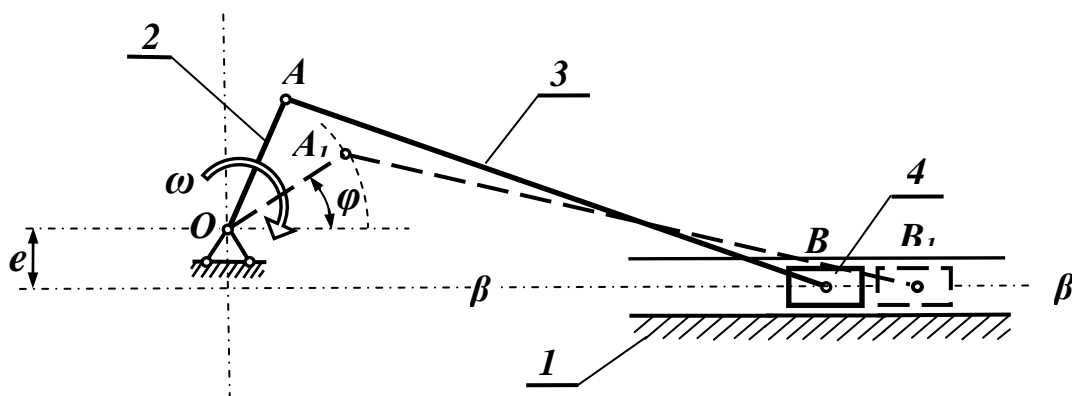


Рисунок 1

Решение

Наиболее простым и распространенным способом исследования механизмов является графоаналитический метод. Следует отметить, что точность решения задачи графоаналитическим методом зависит не только от точности арифметических вычислений, но и от точности геометрических построений. Поэтому надо обратить внимание на строгое соблюдение масштабов и точное взаимное расположение векторов и звеньев механизма.

Решение начинаем с построения схемы механизма по заданным геометрическим параметрам. Для этого требуется построить план механизма для положение ведущего звена OA , т. е. найти положение всех звеньев в заданный момент времени. Построение ведем в следующей последовательности:

- 1) принимаем масштаб изображение звеньев механизма μ_L ;
- 2) чертим положение кривошипа в заданный момент времени (рис. 2, а);
- 3) проводим известные траектории движения точек механизма в принятом масштабе;
 - точка A движется по окружности с центром в точке O ;
 - точка B движется по прямой $\beta-\beta$ вдоль направляющей стойки;
- 4) из точки A раствором циркуля, равным длине шатуна AB , делаем засечку на траектории движения точки B , т. е. на прямой $\beta-\beta$, где и показываем искомое положение ползуна 4.

Далее для данного положения механизма определяем скорости движения узловых точек механизма. Точка O расположена на неподвижной стойке, её скорость равна нулю. Точка A принадлежит кривошипу, совершающему вращающее движение. Следовательно, скорость точки A будет равна

$$V_A = \omega \cdot R.$$

Здесь
$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{3,14 \cdot 100}{30} = 10,47 \text{ 1/с}.$$

Тогда
$$V_A = \omega \cdot R = 10,47 \cdot 0,09 = 0,94 \text{ м/с}.$$

Вектор этой скорости перпендикулярен радиусу OA и направлен в сторону вращения кривошипа (рис 2, а). Таким образом, скорость точки A известна и по величине, и по направлению.

Определяем скорость точки B . Эта точка принадлежит одновременно шатуну 3 и ползуну 4. Поскольку ползун движется вдоль направляющей $\beta-\beta$, то направление скорости этой точки известно: вектор V_B направлен вдоль линии $\beta-\beta$. Шатун движется плоскопараллельно. Скорость произвольной точки тела при плоскопараллельном движении можно определить, как геометрическую сумму вектора скорости полюса и вектора скорости рассматриваемой точки по отношению к полюсу.

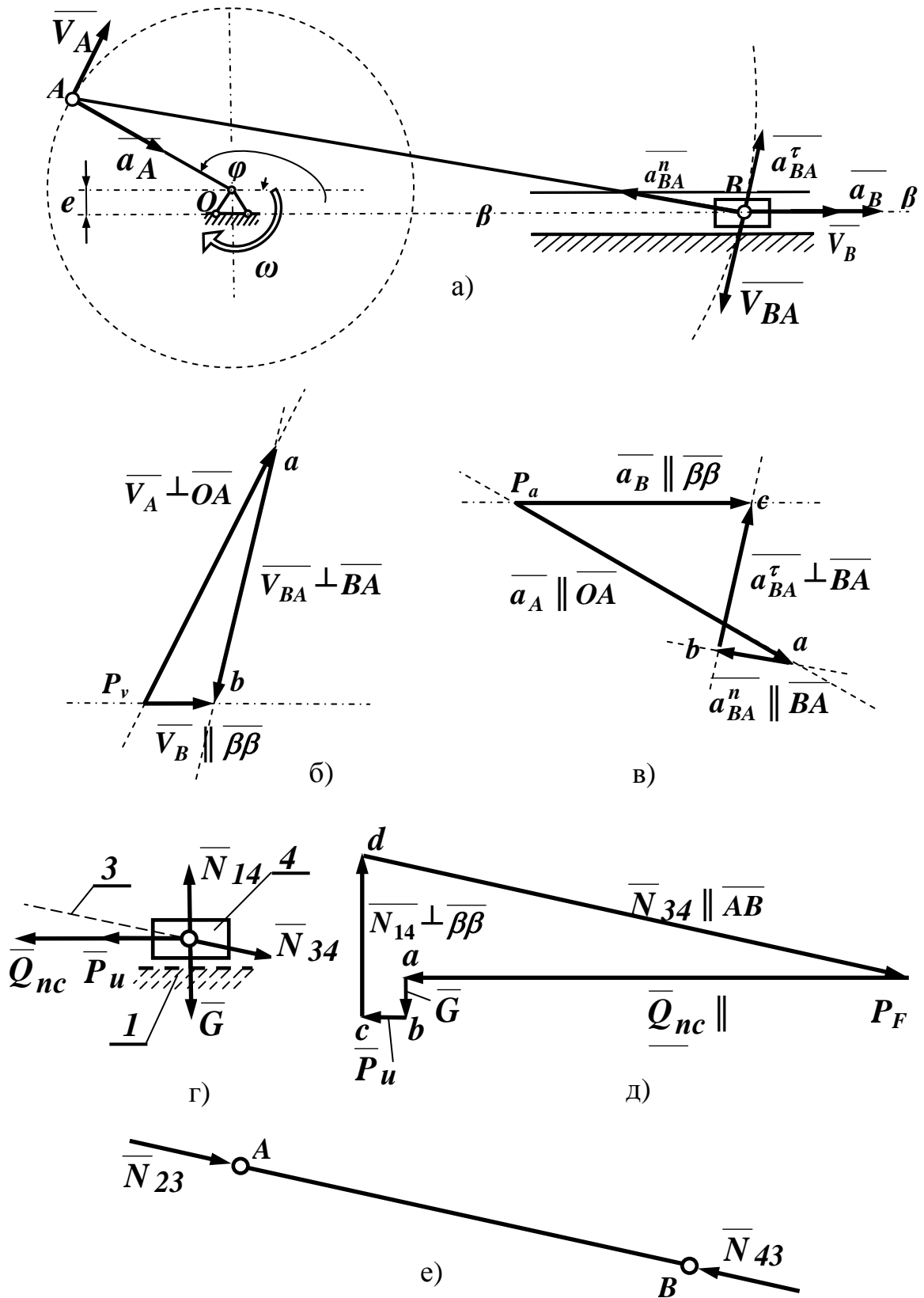


Рисунок 2

За полюс принимаем точку, скорость которой известна, т. е. точку A . Движение точки B по отношению к точке A происходит по дуге окружности с центром в точке A . Следовательно, вектор скорости точки B при её

движении по отношению к точке A направлен по касательной к траектории движения т. е. перпендикулярно линии AB . Таким образом, скорость точки B по отношению к точке A известна по направлению. Векторное уравнение, связывающее скорости точек шатуна, совершающего плоскопараллельное движение, выглядит так

$$\overline{V_B} = \overline{V_A} + \overline{V_{BA}}. \quad (1)$$

Здесь $\overline{V_B}$ – вектор скорости точки B ;

$\overline{V_A}$ – вектор скорости точки A ;

$\overline{V_{BA}}$ – вектор скорости точки B при её движении относительно точки A .

В соответствии с уравнением (1) можно построить векторный треугольник, представляющий собой план скоростей (рис. 2, б). Построение плана скоростей начинаем из полюса P_V , откладывая отрезок $P_V a$, изображающий вектор $\overline{V_A}$, направленный перпендикулярно кривошипу в сторону его вращения. Длину этого отрезка выбираем произвольно, чтобы чертеж получился достаточно крупным и наглядным.

Примем $P_V a = 50$ мм. Длина этого отрезка $P_V a$ определяет масштаб плана скоростей μ_v

$$\mu_v = \frac{V_A}{P_{VA}} = \frac{0,94}{50} = 0,0188 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}.$$

Поскольку вектор $\overline{V_{BA}}$ складывается с вектором $\overline{V_A}$, то по правилу векторного суммирования его начало располагаем в конце вектора $\overline{V_A}$ и направляем его линию действия перпендикулярно отрезку AB . Вектор $\overline{V_B}$ является суммой двух векторов. Следовательно, его начало должно располагаться в начале первого вектора, конец – в конце последнего, и он должен быть направлен параллельно линии $\beta-\beta$. Проведенные линии пересекаются в точке b , определяя длины векторов $\overline{V_B}$ и $\overline{V_{BA}}$. Измеряем на плане длины отрезков $P_V b$ и ab (рис 2, б).

$$P_{Vb} = 15 \text{ мм}, \quad ab = 44 \text{ мм}.$$

Зная масштаб плана скоростей μ_v , определяем величины скоростей этих точек

$$V_{BA} = \mu_v \cdot ab = 0,0188 \cdot 44 = 0,83 \text{ м/с};$$

$$V_B = \mu_v \cdot (P_V b) = 0,0188 \cdot 15 = 0,28 \text{ м/с}.$$

Таким образом, мы нашли скорости всех узловых точек нашего механизма.

Далее определим ускорения точек механизма. Вычисляем полное ускорение точки A , принадлежащей кривошипу, совершающему вращательное движение по формуле

$$\overline{a_A} = \overline{a_A^n} + \overline{a_A^\tau},$$

где a_A^n – нормальное ускорение точки A ; $a_A^n = \omega^2 \cdot R$;

a_A^τ – касательное ускорение точки A ; $a_A^\tau = \varepsilon \cdot R$.

Поскольку движение кривошипа происходит с постоянной угловой скоростью $\omega = const$, то его угловое ускорение $\varepsilon = 0$ и $a_A^\tau = 0$. Тогда

$$a_A = a_A^n = \omega^2 \cdot R = 10,47^2 \cdot 0,09 = 9,87 \text{ м/с}^2.$$

Вектор нормального ускорения точки A направлен к центру кривизны траектории движения этой точки, т. е. к точке O . Следовательно, этот вектор расположен вдоль линии AO .

Учитывая плоскопараллельное движение шатуна, определяем ускорение точки B , принимая за полюс точку A , где ускорение уже найдено

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}^n} + \overline{a_{BA}^\tau}, \quad (2)$$

где $\overline{a_A}$ – ускорение точки A , которое уже определено и по величине, и по направлению;

$\overline{a_{BA}}$ – ускорение точки B относительно точки A , которое раскладывается на два вектора;

$\overline{a_{BA}^n}$ – нормальное ускорение точки B в её движении относительно точки A по дуге окружности с центром в точке A ; этот вектор направлен всегда к центру кривизны траектории движения точки, т. е. вдоль отрезка BA к точке A ;

$\overline{a_{BA}^\tau}$ – касательное ускорение точки B в её движении относительно точки A по дуге окружности с центром в точке A : этот вектор направлен всегда по касательной к траектории движения, т. е. перпендикулярно прямой BA .

Нормальные ускорения точек вращающегося тела определяются следующим образом:

$$a_{BA}^n = \frac{V_{BA}^2}{L} = \frac{0,83^2}{0,28} = 2,46 \text{ м/с}^2.$$

Таким образом, вектор $\overline{a_{BA}^n}$ известен и по величине, и по направлению. Векторы $\overline{a_B}$ и $\overline{a_{BA}^\tau}$ известны только по направлению. Чтобы определить величины этих векторов, строим план ускорений.

Выбираем положение полюса плана ускорений P_a (рис. 2, в). Из этого полюса откладываем отрезок $P_a a$ параллельно линии AO , изображающий вектор ускорения точки A . Длину этого отрезка выбираем произвольно, чтобы план получился достаточно крупный и наглядный. Примем $P_a a = 50$ мм. Размер этого отрезка определяет масштаб плана ускорений, который рассчитывается по зависимости

$$\mu_a = \frac{a_A}{P_a a} = \frac{9,87}{50} = 0,197 \frac{м/с^2}{мм}.$$

Далее в соответствии с уравнением (2) строим вектор $\overline{a_{BA}^n}$. Длину отрезка av , выражающего этот вектор, определим с помощью принятого масштаба

$$av = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a} = \frac{2,46}{0,197} = 12,5 \text{ мм}.$$

Поскольку вектор $\overline{a_{BA}^n}$ суммируется с вектором $\overline{a_A}$, то его начало совпадает с концом предыдущего вектора, а направлен он параллельно линии BA в сторону точки A . Из конца этого вектора проводим линию действия вектора $\overline{a_{BA}^\tau}$ перпендикулярно прямой AB . Вектор $\overline{a_B}$ по уравнению (2) равен сумме трех векторов, а значит его начало выходит из полюса P_a , и он направлен параллельно линии $\beta-\beta$. Линии действия векторов $\overline{a_{BA}^\tau}$ и $\overline{a_B}$ пересекаются в точке c , определяя величины этих векторов. Измеряем длины отрезков bc и $P_a c$

$$bc = 23 \text{ мм}, \quad P_a c = 35 \text{ мм}.$$

Определяем ускорения векторов $\overline{a_{BC}^\tau}$ и $\overline{a_B}$

$$a_{BC}^\tau = \mu_a \cdot bc = 0,197 \cdot 23 = 4,53 \text{ м/с}^2, \\ a_B = \mu \cdot P_a c = 0,197 \cdot 35 = 6,90 \text{ м/с}^2.$$

Таким образом, мы определили ускорения всех узловых точек данного механизма.

2 Практическое занятие №2 «Силовой расчет кривошипно-ползунного механизма»

Для определения сил, действующих на звенья механизма используем принцип Даламбера, согласно которому любое твердое тело можно условно считать находящимся в состоянии равновесия под действием всех приложенных к нему внешних сил, включая силу инерции.

Силовой расчет механизма ведется в порядке, обратном кинематическому исследованию, т. е. сначала ведется расчет последней присоединенной группы Ассура, затем предыдущей и т. д. и, наконец, ведется расчет ведущего звена. В основу силового расчета положен принцип Даламбера, который заключается в том, что звено предполагается условно находящимся в состоянии равновесия под действием всех внешних сил, включая силы инерции. Этот принцип позволяет применить к движущейся системе уравнения статического равновесия.

В расчетах будем учитывать только массу ползуна, массой остальных подвижных звеньев будем пренебрегать для простоты решения задачи, исключая инерционные нагрузки, возникающие при их движении.

Мысленно отсоединим ползун 4 от механизма (рисунок 1) и заменим действие остальных присоединенных к нему звеньев их реакциями (рисунок 2, г). Здесь вектором Q_{nc} обозначена сила полезного сопротивления, которая всегда направлена против движения ползуна, т. е. против вектора скорости $\overline{V_B}$ (рис. 2, г). Величина этой силы известна по условию задачи. Вектором \overline{P}_i обозначена сила инерции ползуна, которая направлена против вектора ускорения ползуна a_B (рисунок 2, г). Величину силы инерции определяем по второму закону Ньютона

$$P_i = m \cdot a_B = \frac{G}{g} a_B = \frac{180}{9,8} \cdot 6,9 = 126,7 \text{ Н.}$$

Здесь g – ускорение свободного падения.

Вектор собственного веса ползуна \overline{G} направлен вертикально вниз. Реакция стойки 1 на ползун 4 обозначена вектором \overline{N}_{14} , где первый индекс показывает, какое звено оказывает действие, а второй – на какое звено действует реакция. Линия действия этого вектора направлена перпендикулярно поверхности контакта этих звеньев, т. е. вертикально. Величина вектора неизвестна. Действие шатуна на ползун обозначено вектором \overline{N}_{34} . Вектор этой реакции направлен вдоль оси шатуна. Величина этой реакции неизвестна.

Для определения неизвестных сил N_{14} и N_{34} воспользуемся принципом Даламбера, согласно которого сумма всех приложенных к ползуну сил, включая силу инерции, равна нулю. В векторном виде это условие равновесия выражается уравнением

$$\overline{Q}_{nc} + \overline{G} + \overline{P}_u + \overline{N}_{14} + \overline{N}_{34} = 0.$$

В этом векторном уравнении первые три вектора известны и по величине, и по направлению, а два последние – только по направлению. Построим план сил (рисунок 2, д). Построение плана начинаем из полюса P_F , откладывая отрезок $P_F a$, изображающий вектор силы полезного сопротивления \overline{Q}_{nc} и направленный вдоль направляющей $\beta-\beta$ навстречу вектору скорости \overline{V}_B . Длину этого отрезка выбираем произвольно, так чтобы чертеж получился достаточно крупным и наглядным. Пусть $P_F a = 100 \text{ мм}$. Длина отрезка $P_F a$ определяет масштаб плана сил μ_F .

$$\mu_F = \frac{Q_{nc}}{P_F a} = \frac{3200}{100} = 32 \frac{\text{Н}}{\text{мм}}.$$

По выбранному масштабу находим длину отрезка ab , выражающего силу веса ползуна \overline{G} .

$$ab = \frac{G}{\mu_F} = \frac{180}{32} = 5,6 \text{ мм}.$$

Поскольку этот вектор складывается с первым вектором, то по правилу векторного суммирования его начало совпадает с концом первого вектора, и он направлен вертикально вниз. Аналогично определяем отрезок bc , выражающий длину вектора силы инерции ползуна \overline{P}_u

$$bc = \frac{P_u}{\mu_F} = \frac{126,7}{32} = 4,0 \text{ мм}.$$

Этот отрезок начинается в конце второго вектора \overline{G} и направлен вдоль направляющей $\beta-\beta$ против силы инерции. Из конца этого вектора проводим линию действия реакции \overline{N}_{14} стойки на ползун, направленную перпендикулярно направляющей $\beta-\beta$. Поскольку сумма всех сил должна быть равна нулю, то последний вектор \overline{N}_{34} должен замыкать векторный многоугольник, т. е. его конец должен попасть в полюс плана. Поэтому из этого полюса проводим линию действия последнего вектора в направлении, параллельном положению шатуна BA . Эта линия пересекается с линией действия реакции \overline{N}_{14} в точке d , определяя длины отрезков cd и dP_F , выражающих размер искомых реакций. Теперь величины этих реакций находим измерением длин этих отрезков

$$cd = 30 \text{ мм}. \quad dP_F = 108 \text{ мм}.$$

С учетом принятого масштаба определяем значения сил \overline{N}_{14} и \overline{N}_{34}

$$N_{14} = \mu_F \cdot cd = 32 \cdot 30 = 960 \text{ Н} ,$$
$$N_{34} = \mu_F \cdot dP_F = 32 \cdot 108 = 3456 \text{ Н} .$$

Таким образом, все силы, действующие на ползун, найдены. Для определения сил, действующих в кинематической паре A (рисунок 2, а), соединяющей кривошип и шатун, рассмотрим силы, приложенные к шатуну. Для этого мысленно отсоединим его от механизма, а действие на шатун присоединенных звеньев заменим их реакциями (рисунок 2, е). Реакция действия ползуна на шатун, очевидно, равна реакции действия шатуна на ползун, но направлена в противоположную сторону в соответствии с третьим законом Ньютона, т. е. $\overline{N}_{43} = -\overline{N}_{34}$. Силы, действующие на шатун направлены вдоль оси шатуна, т. к. шатун соединен с кривошипом и ползуном вращательными кинематическими парами. Поскольку этих сил всего две, то из условия равновесия они должны быть равны по величине, т. е. $N_{23} = N_{43} = 3456 \text{ Н}$ и противоположны по направлению. Подобным образом можно определить силы, действующие на кривошип.

3. Практическое занятие №3 « Геометрический синтез цилиндрической зубчатой передачи»

Расчет цилиндрической эвольвентной зубчатой передачи (z_4, z_5) внешнего зацепления начинают с определения передаточного отношения по следующей зависимости:

$$u_{45} = -\frac{z_5}{z_4}. \quad (1)$$

Определяют диаметры делительных окружностей зубчатых колес по зависимостям

$$d_4 = m \cdot z_4, \quad (2)$$

$$d_5 = m \cdot z_5. \quad (3)$$

Назначают коэффициенты смещения исходного контура $x_4 = x_5 = 0$.
Для «нулевой» зубчатой передачи:

- угол зацепления $\alpha_w = \alpha = 20^\circ$;

- делительное межосевое расстояние равно начальному межосевому расстоянию и определяется по зависимости

$$a_{45} = a_{w45} = \frac{m(z_4 + z_5)}{2}. \quad (4)$$

Диаметры начальных окружностей равны делительным диаметрам

$$d_{w4} = d_4, \quad d_{w5} = d_5. \quad (5)$$

Диаметры основных окружностей определяют по формулам

$$d_{b4} = d_4 \cdot \cos \alpha, \quad (6)$$

$$d_{b5} = d_5 \cdot \cos \alpha. \quad (7)$$

Диаметры окружностей вершин зубьев определяем по формулам

$$d_{a4} = m \cdot (z_4 + 2), \quad (8)$$

$$d_{a5} = m \cdot (z_5 + 2). \quad (9)$$

Диаметры окружностей впадин зубьев определяем по формуле

$$d_{f4} = m \cdot (z_4 - 2,5), \quad (10)$$

$$d_{f5} = m \cdot (z_5 - 2,5). \quad (11)$$

Шаг зубьев по делительной окружности определяют по зависимости

$$p = \pi \cdot m. \quad (12)$$

Толщину зубьев и ширину впадин по делительной окружности определяют по зависимости

$$S = e = \frac{p}{2} = \frac{\pi \cdot m}{2}. \quad (13)$$

Высота зубьев зубчатых колес определяется по зависимости

$$h = 2,25 \cdot m. \quad (14)$$

Общее передаточное отношение привода определяется выражением

$$u_{15} = u_{1H}^{(3)} \cdot u_{45}. \quad (15)$$

Угловую скорость выходного вала ω_5 находим как

$$\omega_5 = \frac{\omega_1}{u_{15}}. \quad (16)$$

Значения основных параметров привода и планетарного механизма (m , z_1 , z_2 , z_3 , k , $u_{1H}^{(3)}$, u_{45} , u_{15} , ω_1 , ω_5) следует привести на чертеже в таблице.

На формате А1 в выбранном масштабе вычерчивают кинематическую схему привода с планетарным механизмом в двух проекциях (рисунок 1). Она должна разместиться на $\frac{1}{2}$ формата А1.

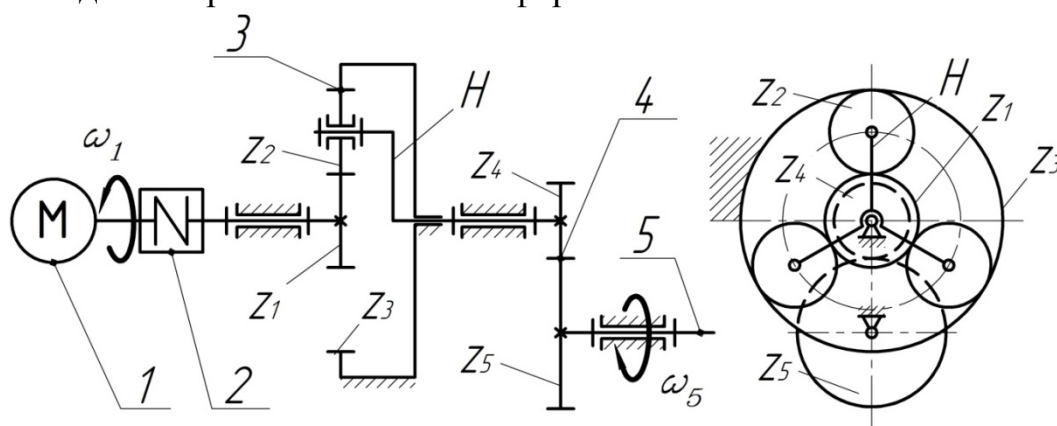


Рисунок 1 – Кинематическая схема привода с планетарным механизмом

На второй половине формата А1 чертят схему внешнего эвольвентного зубчатого зацепления колес z_4 и z_5 . Масштаб построения выбирают таким образом, чтобы высота зубьев h на чертеже была не менее 40...50 мм. Построение желательно выполнять в САПР КОМПАС или AutoCAD.

Построение зацепления «нулевых» зубчатых колес начинают с нанесения точек центров колес O_4 и O_5 на расстоянии a_{45} , вычисленного по

формуле (7.14). Из центров колес поводят окружности диаметрами d , d_b (рисунок 14). Делительные окружности с диаметрами d_4 и d_5 должны касаться друг друга в полюсе p на линии центров $O_4 O_5$. Затем проводят общую касательную $N_4 N_5$ к основным окружностям d_{b4} и d_{b5} , которая является линией зацепления и проходит через полюс p . Угол между линией центров $O_4 O_5$ и линиями $O_4 N_4$ и $O_5 N_5$ должен составить $\alpha = 20^\circ$. Затем проводят окружности вершин d_a и впадин d_f зубчатых колес.

Построение эвольвентных профилей проводим отдельно для каждого колеса, по следующему алгоритму.

Эвольвента начинается от основной окружности, поэтому на основной окружности, в стороне от будущего зацепления, выбираем точку начала построения и через неё проводим линию из точки O . Затем проводим 6–10 лучей из точки O , отстоящих от построенной линии с шагом 5° . Дуги, заключенные между линией и лучами, будут равны соответствующим радиусам кривизны эвольвенты, которые перпендикулярны к лучам (рисунок 2). Длины дуг и соответственно радиусы кривизны рассчитывают по зависимости

$$\rho_i = \tilde{l}_i = \frac{d_b}{2} \cdot \psi_i, \quad (17)$$

где ψ_i - угол расположения соответствующего луча от линии, в радианах.

Откладывают расстояния ρ_i на линиях перпендикулярных лучам и проставляют точки. Затем соединяют полученные точки плавной кривой, учитывая, что эвольвентный профиль начинается от основной окружности и заканчивается на окружности вершин.

Рассчитывают угловой шаг зубьев по делительной окружности как

$$\varphi = \frac{360^\circ}{z}. \quad (18)$$

Откладывают от линии центров $O_4 O_5$ на каждом колесе своё значение углового шага в виде лучей. Пересечение лучей с делительной окружностью дает точки пересечения профиля зубьев с делительной окружностью. Копируем ранее построенный профиль в соответствующие полученные точки.

Чтобы наметить пересечения с делительной окружностью второй (затылочной) части зуба, необходимо угловые шаги разделить пополам биссектрисой. Для построения второй части зуба половину углового шага необходимо разделить биссектрисой и использовать ее для отражения профиля. Затем копировать полученный профиль в соответствующие точки.

Если $d_f \geq d_b$, то эвольвенту и окружность впадин сопрягаем дугой радиуса $(0,38...0,4) \cdot m$. Если $d_f < d_b$, то от начала эвольвенты до окружности впадин проводят радиальный отрезок, который сопрягают с окружностью впадин дугой радиуса $(0,38...0,4) \cdot m$.

Зацепление вычерчивается без бокового зазора, поэтому профили зубьев колес должны касаться в точках на линии зацепления $N_4 N_5$. Выделить жирно активный участок линии зацепления AB зубчатой передачи, в пределах которого контактируют профили зубьев. Отрезок AB заключен между точками пересечения линии зацепления с окружностями вершин.

Для нахождения активных профилей зубьев, участвующих в зацеплении необходимо точку A линии зацепления перенести радиусом $O_4 A$ на эвольвенту первого колеса, а точку B перенести радиусом $O_5 A$ на эвольвенту второго колеса. Участки профиля заключенные между полученными точками и окружностями вершин будут являться активными профилями, которые необходимо выделить утолщенными линиями.

На чертеже должны быть указаны диаметры всех окружностей, межосевое расстояние, угол зацепления, шаг зубьев по делительной окружности, толщина зуба и ширина впадины по делительной окружности, высота зуба, высота ножки и головки зуба, необходимо указать направление вращения колес (рисунок 2).

Для каждого изображения необходимо указывать масштаб построения. Значения основных геометрических параметров цилиндрической передачи ($m, z_4, z_5, x_4, x_5, \alpha^\circ, h_a^*, c^*$) следует привести на чертеже в таблице.

$m, \text{мм}$	z_1	z_2	z_3	k	$u_{1H}^{(3)}$	u_{45}	u_{15}	$\omega_1, \text{с}^{-1}$	$\omega_5, \text{с}^{-1}$
4	33	33	99	3	4	2	8	100	12,5

$m, \text{мм}$	z_4	z_5	x_4	x_5	α°	h_a^*	c^*
5	20	40	0	0	20	1	0,25

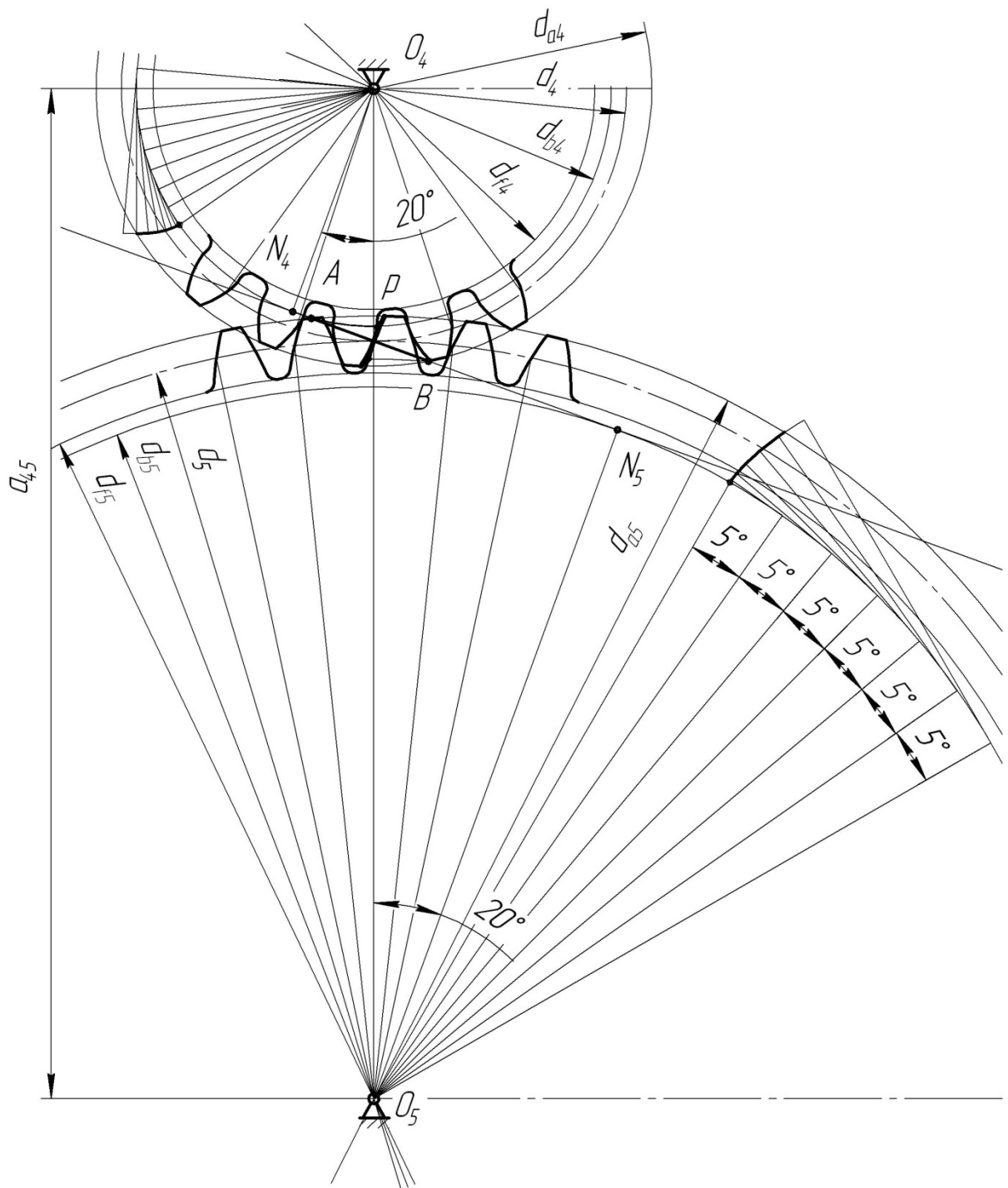


Рисунок 2 – Схема построения эвольвентного зубчатого зацепления

4 Практическое занятие №4 «Расчет ступенчатого бруса на прочность и жесткость при растяжении-сжатии»

Для стержня, изображенного на рисунке 1, а, требуется определить внутренние продольные силы, нормальные напряжения в сечениях стержня и перемещения сечений стержня, изобразив эти зависимости графически в виде эпюр. Проверить прочность и жесткость стержня.

Для решения задачи принять:

- сила $F = 8 \text{ кН}$;
- площадь поперечного сечения $A = 125 \text{ мм}^2$;
- длины участков стержня: $a = 0,75 \text{ м}$, $b = 0,5 \text{ м}$, $c = 1 \text{ м}$;
- материал стержня – сталь с модулем упругости $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ МПа}$;
- допускаемое напряжение $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$;
- допустимое перемещение свободного конца стержня $[\delta] = 1,5 \text{ мм}$.

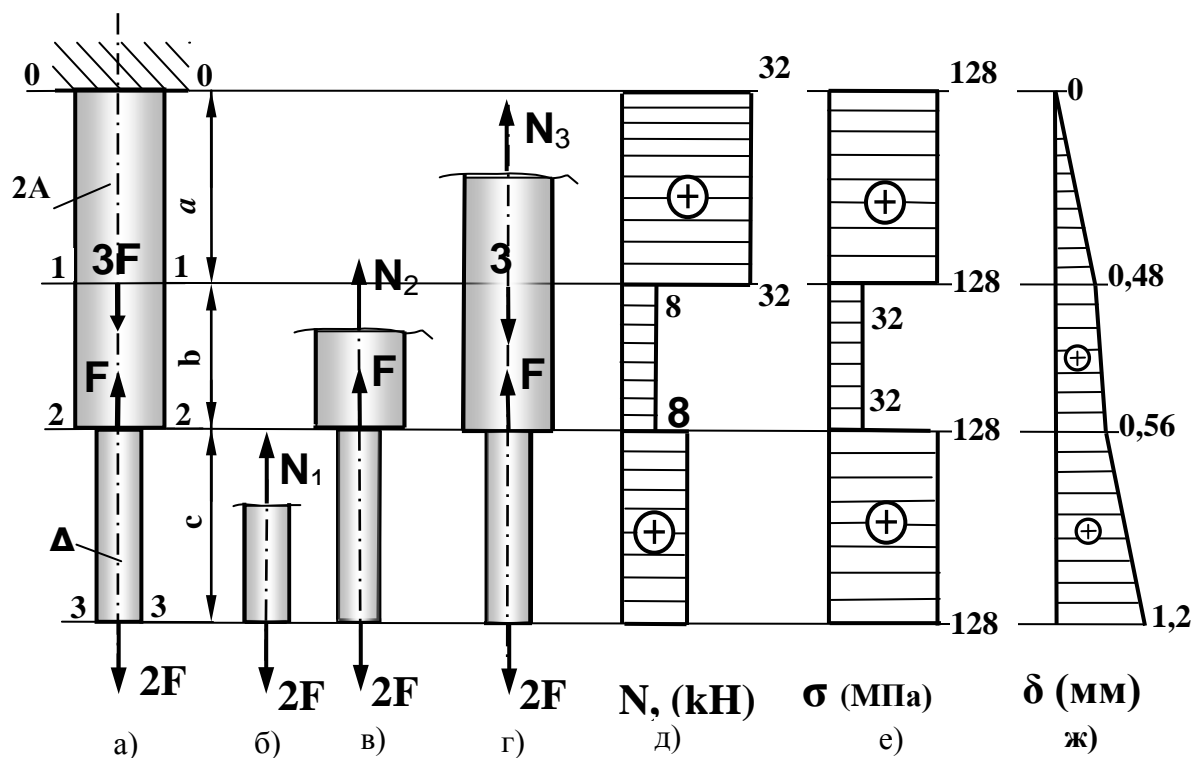


Рисунок 1 – Эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений сечений стержня

Решение

Разбиваем стержень на участки. Границей участка являются любые характерные сечения, например сечения, где приложены внешние силы или изменяется размер поперечного сечения. Пользуясь методом сечений, рассекаем каждый участок и определяем внутренние продольные силы (рис. 1, б, в, г). При этом пользуемся следующим правилом знаков. Сила считается положительной, если она растягивает стержень и отрицательная, если она сжимает стержень в месте рассечения. Тогда мы получаем следующие значения внутренних продольных сил на каждом участке:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= 2F = 16 \text{ кН}; \\
 N_2 &= 2F - F = 8 \text{ кН}; \\
 N_3 &= 2F - F + 3F = 32 \text{ кН}.
 \end{aligned}$$

Строим эпюру продольных сил (рисунок 1, д). Для этого проводим ось эпюры параллельно оси стержня. От каждой границы участка проводим линии до пересечения с осью эпюры. Найденные значения внутренних продольных сил на каждом участке откладываем перпендикулярно оси эпюры. При этом положительные значения откладываем сторону положительного направления координатной оси, отрицательные – в обратную сторону. Расставляем числовые значения внутренних сил на каждом участке, обозначаем название эпюры соответствующим символом и указываем размерность физических величин, изображенных на эпюре.

Затем вычисляем нормальные напряжения на каждом участке, помня о том, что необходимо соблюдать размерности чисел, входящих в расчетные формулы. Знак нормальных напряжений определяется по тому же правилу, что и знак продольной силы: если напряжение растягивающее, оно считается положительное, если сжимающее – оно отрицательное.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{16 \cdot 10^3}{125 \cdot 10^{-6}} = 0,128 \cdot 10^9 = 128 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{2A} = \frac{8 \cdot 10^3}{250 \cdot 10^{-6}} = 0,032 \cdot 10^9 = 32 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{2A} = \frac{32 \cdot 10^3}{250 \cdot 10^{-6}} = 0,128 \cdot 10^9 = 128 \text{ МПа}.$$

Строим эпюру нормальных напряжений (рисунок 1, е). Максимальное напряжение в стержне не превышает допускаемой величины

$$\sigma_{max} = 128 \text{ МПа} < [\sigma],$$

следовательно, условие прочности выполняется.

Определим перемещения характерных сечений стержня. Расчет начинаем от сечения, где перемещение известно по условию задачи, а именно – в опоре. Это сечение $0-0$ остается неподвижным, поскольку оно закреплено

$$\delta_{0-0} = 0.$$

Перемещение сечение $1-1$ на границе верхнего и среднего участка будет зависеть от того, насколько растянется верхний участок, т. е.

$$\delta_{1-1} = \Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot a}{E \cdot A_3} = \frac{32 \cdot 10^3 \cdot 0,75}{2 \cdot 10^{11} \cdot 250 \cdot 10^{-6}} = 48 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,48 \text{ мм}.$$

Перемещение сечения 2-2 на границе среднего и нижнего участка зависит от перемещения сечения 1-1 и деформации среднего участка, т. е.

$$\begin{aligned} \delta_{2-2} &= \delta_{1-1} + \frac{N_2 \cdot b}{E \cdot A_2} = 48 \cdot 10^{-5} + \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 250 \cdot 10^{-6}} = \\ &= 48 \cdot 10^{-5} + 8 \cdot 10^{-5} = 56 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,56 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Перемещение нижнего конца стержня 3-3 зависит от перемещения сечения 2-2 и деформации нижнего участка

$$\begin{aligned} \delta_{3-3} &= \delta_{2-2} + \frac{N_1 \cdot c}{E \cdot A_1} = 56 \cdot 10^{-5} + \frac{16 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 125 \cdot 10^{-6}} = \\ &= 56 \cdot 10^{-5} + 64 \cdot 10^{-5} = 120 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 1,2 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Строим эпюру перемещений (рисунок 1, ж). Максимальное перемещение сечений стержня не превышает допустимой величины

$$\Delta_{max} = 1,2 \text{ мм} < [\delta],$$

следовательно, условие жесткости выполняется.

5. Практическое занятие №5 «Расчёт на прочность и жёсткость при кручении»

Задача

Для стального бруса, изображенного на рис. 1,а, требуется определить внутренние крутящие моменты и касательные напряжения в его сечениях, а также найти угловые перемещения сечений бруса. Результаты расчетов изобразить в виде эпюр. Проверить прочность и жесткость бруса.

Для решения принять:

- моменты $T_1 = 15 \text{ Нм}$, $T_2 = 24 \text{ Нм}$, $T_3 = 28 \text{ Нм}$;
- диаметры участков стержня $d_1 = 12 \text{ мм}$, $d_2 = 20 \text{ мм}$;
- длины участков $a = 150 \text{ мм}$, $b = 100 \text{ мм}$, $c = 250 \text{ мм}$;
- модуль сдвига $G = 8 \cdot 10^{10} \text{ Па}$;
- допускаемые касательные напряжения $[\tau] = 100 \text{ МПа}$;
- допускаемый угол закручивания $[\varphi] = 1,5^\circ$.

Решение

Развиваем стержень на участки. Границами участков являются сечения, где приложены внешние крутящие моменты либо изменяется размер поперечного сечения. Внутренние крутящие моменты определяем методом сечений. Учитывая, что знак крутящего момента не оказывает никакого влияния на прочность стержня при кручении, не будем вводить правило знаков для этого внутреннего силового фактора, но моментам, направленным в разные стороны будем присваивать разные знаки. Тогда, отсекая первый участок от свободного конца стержня длиной c , видим, что на него действует только один внешний момент T_1 (рис 1, б). Следовательно, внутренний крутящий момент на этом участке T_{B1} должен уравнивать внешний момент, т. е.

$$T_{B1} = T_1 = 15 \text{ Нм}.$$

Аналогично рассматривая второй участок, определяем внутренний крутящий момент T_{B2} , который уравнивает два внешних момента T_1 и T_2 , направленные в разные стороны, следовательно момент T_2 должен иметь другой знак, чем момент T_1 , т. е.

$$T_{B2} = T_1 - T_2 = 15 - 24 = -9 \text{ Нм}.$$

Внутренний крутящий момент на третьем участке равен

$$T_{B3} = T_1 - T_2 + T_3 = 15 - 24 + 28 = 19 \text{ Нм}.$$

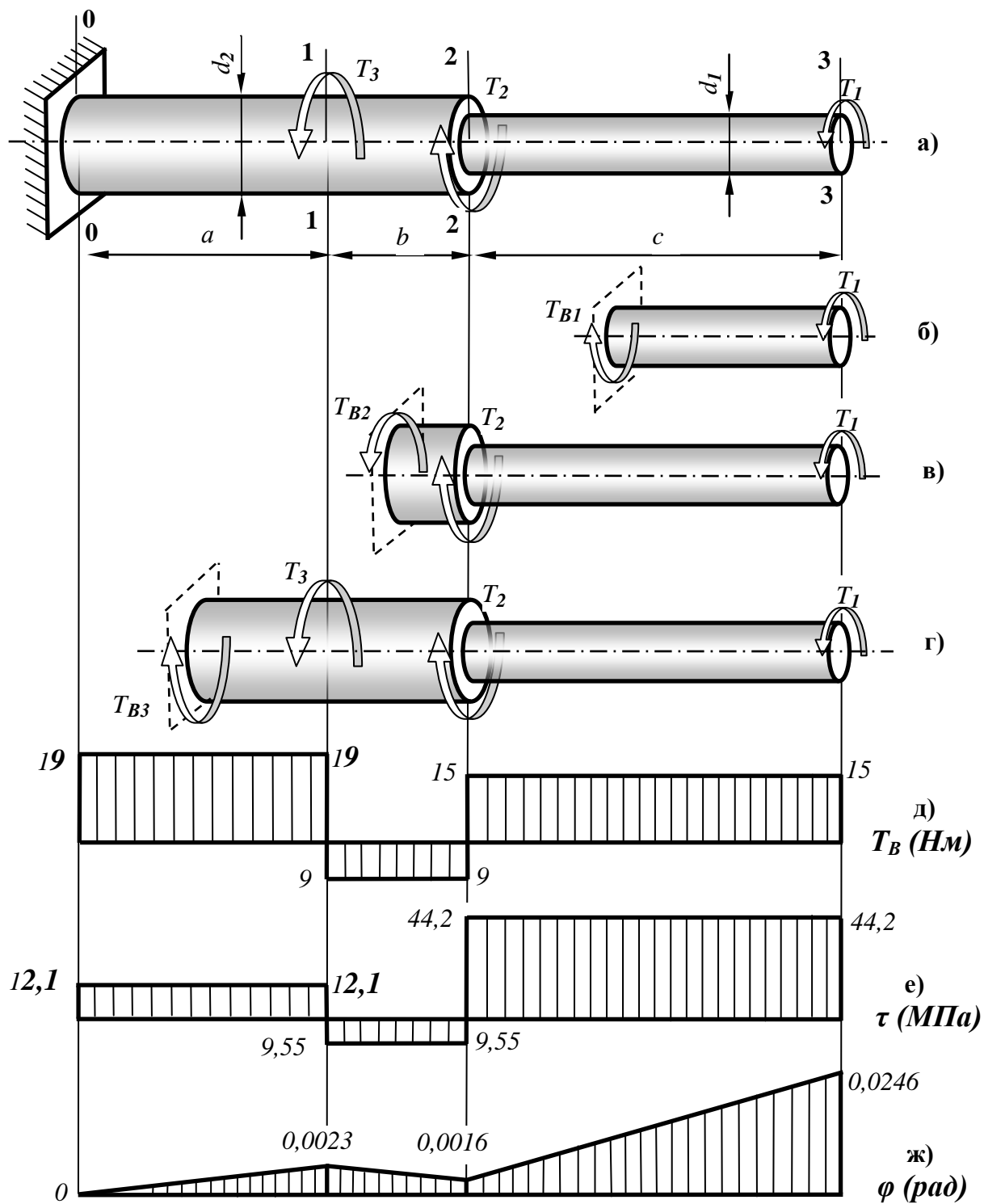


Рисунок 1 – Эпюры крутящих моментов, касательных напряжений и угловых перемещений сечений бруса

Для определения величины касательных напряжений и углов закручивания участков стержня необходимо вычислить геометрические характеристики сечений вала.

Определяем полярный момент сопротивления круглого сечения на первом участке

$$W_{P1} = \frac{\pi \cdot d_1^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 12^3}{16} = 339 \text{ мм}^3.$$

Полярный момент сопротивления сечения на втором и третьем участке

$$W_{P2} = W_{P3} = \frac{\pi \cdot d_2^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 20^3}{16} = 1570 \text{ мм}^3.$$

Вычисляем полярный момент инерции сечения вала на каждом участке:

$$I_{P1} = \frac{\pi \cdot d_1^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 12^4}{32} = 2035 \text{ мм}^4,$$

$$I_{P2} = I_{P3} = \frac{\pi \cdot d_2^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 20^4}{32} = 15700 \text{ мм}^4.$$

Определяем касательные напряжения на каждом участке.

$$\tau_1 = \frac{T_1}{W_{P1}} = \frac{15 \cdot 10^3}{339} = 44,2 \text{ МПа},$$

$$\tau_2 = \frac{-T_2}{W_{P2}} = \frac{-9 \cdot 10^3}{1570} = -9,55 \text{ МПа},$$

$$\tau_3 = \frac{T_3}{W_{P3}} = \frac{19 \cdot 10^3}{1570} = 12,1 \text{ МПа}.$$

Строим эпюру касательных напряжений (рис. 1, е). Максимальное напряжение в сечениях стержня τ_{max} меньше допустимых напряжений

$$\tau_{max} < [\tau].$$

Следовательно, условие прочности стержня выполняется.

Определяем угловые перемещения сечений стержня под действием крутящих моментов. Расчет начинаем от сечения, где стержень закреплен.

Угол поворота этого сечения γ_{0-0} равен нулю

$$\gamma_{0-0} = 0.$$

Угол поворота сечения $I-I$ на границе третьего и второго участка зависит от угла закручивания третьего участка

$$\gamma_{I-I} = \varphi_3 = \frac{T_3 \cdot a}{G \cdot I_{P3}} = \frac{19 \cdot 0,15}{8 \cdot 10^{10} \cdot 15700 \cdot 10^{-12}} = 0,0023.$$

Угол поворота сечения $2-2$ на границе второго и первого участка равен сумме угла поворота сечения $I-I$ и угла закручивания второго участка

$$\begin{aligned} \gamma_{2-2} &= \gamma_{I-I} + \varphi_2 = \gamma_{I-I} + \frac{T_2 \cdot b}{G \cdot I_{P2}} = \\ &= 0,0023 + \frac{-9 \cdot 0,1}{8 \cdot 10^{10} \cdot 15700 \cdot 10^{-12}} = 0,0016. \end{aligned}$$

Угол поворота конечного сечения стержня $3-3$ равен сумме угла поворота сечения $2-2$ и угла закручивания первого участка

$$\begin{aligned} \gamma_{3-3} &= \gamma_{2-2} + \varphi_1 = \gamma_{2-2} + \frac{T_1 \cdot c}{G \cdot I_{P1}} = \\ &= 0,0016 + \frac{15 \cdot 0,25}{8 \cdot 10^{10} \cdot 2035 \cdot 10^{-12}} = 0,0246. \end{aligned}$$

Переведем максимальный угол поворота конечного сечения стержня из радианов в градусы

$$\gamma_{max}^o = \gamma_{max} \cdot \frac{180}{\pi} = 0,0246 \cdot \frac{180}{3,14} = 1,41^o.$$

Максимальный угол поворота не превышает допускаемого значения

$$\gamma_{max} = 1,41 < [\varphi],$$

следовательно, условие жесткости стержня выполняется.

6 Практическое занятие №6 «Расчет на прочность при изгибе»

Для балки, изображенной на рисунке 1 выполнить проектный расчет, подобрав четыре вида поперечного сечения: круглое, квадратное, прямоугольное с отношением высоты сечения к его ширины равное двум и двутавровое. Сравнить выбранные сечения на экономичность по расходу материала.

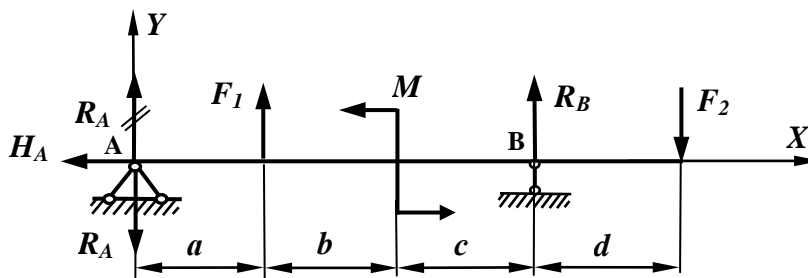


Рисунок 1 – Схема балки

Исходные данные для расчета

- Сосредоточенные силы: $F_1 = 8 \text{ кН}$; $F_2 = 5 \text{ кН}$.
- Момент пары сил $M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$.
- Длины участков балки: $a = 2 \text{ м}$; $b = 0,5 \text{ м}$; $c = 1,5 \text{ м}$; $d = 1 \text{ м}$.

Решение

Решение задачи начинаем с определения опорных реакций. Для этого составляем уравнения статического равновесия.

$$\sum M_A = F_1 \cdot a + M + R_B(a + b + c) - F_2(a + b + c + d) = 0.$$

В этом уравнении одна неизвестная реакция R_B . Найдём её.

$$\begin{aligned} R_B &= \frac{-F_1 \cdot a - M + F_2(a + b + c + d)}{a + b + c} = \\ &= \frac{-8 \cdot 2 - 4 + 5(2 + 0,5 + 1,5 + 1)}{2 + 0,5 + 1,5} = 1,25 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Аналогично составим сумму моментов всех сил относительно второй опоры.

$$\sum M_B = -R_A(a + b + c) - F_1(b + c) + M - F_2 \cdot d = 0.$$

Отсюда найдём вторую опорную реакцию.

$$R_A = \frac{-F_1(b+c) + M - F_2 \cdot d}{a+b+c} =$$

$$= \frac{-8(0,5+1,5) + 4 - 5 \cdot 1}{2+0,5+1,5} = -4,25 \text{ кН.}$$

Знак минус реакции R_A означает, что этот вектор направлен в противоположную сторону. Выполним исправление направления реакции R_A , для чего зачеркнем первоначальное направление вектора на схеме и укажем правильное направление.

Горизонтальная реакция в шарнирно-неподвижной опоре A равна нулю, так как никаких активных сил в направлении оси X не действует.

$$\Sigma X = -H_A = 0; \quad \text{откуда } H_A = 0.$$

Для проверки правильности нахождения опорных реакций можно составить сумму проекций всех сил на ось Y .

$$\Sigma Y = R_A + F_1 + R_B - F_2 = -4,25 + 8 + 1,25 - 5 = 0.$$

Проверка подтверждает правильность выполненного решения.

Теперь определяем внутренние изгибающие моменты в сечениях балки с применением метода сечений. Для этого мысленно рассекаем каждый участок балки поочередно, отбрасываем одну часть, заменяем действие отброшенной части на оставшуюся внутренними силовыми факторами и составляем уравнение равновесия оставшейся части балки. При этом знак внутреннего изгибающего момента определяем в зависимости от знака кривизны балки: если балка под действием внутреннего момента изгибается выпуклостью вниз, такой момент считается положительным; в обратном случае – отрицательным.

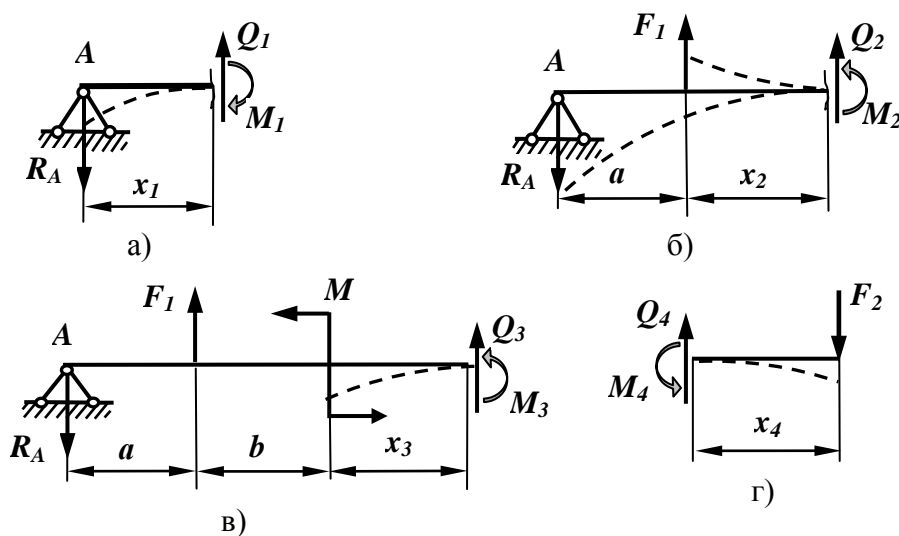


Рисунок 2 – Варианты изгиба упругой линии балки

Кроме изгибающего момента в поперечных сечениях балки возникает также поперечная сила. Но влияние этого силового фактора на прочность балки не существенно, поэтому построение эпюры поперечных сил в данной теме не рассматривается.

Рассмотрим первый участок балки длиной a (рисунок 1). Рассечем этот участок в сечении с координатой x_1 и отбросим правую часть балки. На оставшейся левой части балки действует только одна внешняя сила R_A , которая создает относительно рассматриваемого сечения момент с плечом x_1 . Под действием этой силы точка A будет перемещаться в направлении силы, балка будет изгибаться выпуклостью вверх, как показано пунктиром на рисунке 2, а.

В соответствии с правилом знаков момент от силы R_A будет отрицательным. Следовательно,

$$M_1 = -R_A \cdot x_1.$$

Здесь x_1 может принимать значения в пределах длины первого участка, то есть

$$0 \leq x_1 \leq a.$$

Зададим крайние значения координаты x_1 и определим соответствующие значения момента на границах первого участка.

$$\text{При } x_1 = 0 \quad M_1 = 0;$$

$$\text{при } x_1 = a = 2 \text{ м} \quad M_1 = -R_A \cdot a = -4,25 \cdot 2 = -8,5 \text{ кНм}.$$

Рассмотрим второй участок. После его рассечения в некотором сечении с координатой x_2 и отбрасывания правой части, видно, что на оставшуюся часть действуют две внешние силы - R_A и F_1 (рисунок 2, б). Реакция опоры A имеет плечо $(a + x_2)$ и изгибает балку по-прежнему выпуклостью вверх, следовательно, изгибающий момент от этой реакции будет отрицательный. Сила F_1 имеет плечо x_2 , точка приложения силы будет перемещаться в направлении этой силы, т. е. вверх, следовательно, эта сила будет стремиться изгибать балку выпуклостью вниз, как указано на рисунке 2, б пунктиром. Знак изгибающего момента от этой силы получается положительный. Тогда внутренний момент на втором участке будет равен

$$M_2 = -R_A \cdot (a + x_2) + F_1 \cdot x_2, \text{ где } 0 \leq x_2 \leq b.$$

Задаем граничные значения координаты x_2 .

$$\text{При } x_2 = 0 \quad M_2 = -R_A \cdot a = -4,25 \cdot 2 = -8,5 \text{ кНм};$$

$$\text{при } x_2 = b = 0,5 \text{ м}$$

$$M_2 = -R_A \cdot (a + b) + F_1 \cdot b = -4,25 \cdot 2,5 + 8 \cdot 0,5 = -6,625 \text{ кНм}.$$

Переходим к третьему участку. Рассекаем его в сечении с координатой x_3 и отбрасываем правую часть (рисунок 2, в). На оставшейся части действуют силы R_A , F_1 и пара сил с моментом M . Реакция опоры имеет плечо $(a + b + x_3)$ и даст отрицательный момент. Сила F_1 имеет плечо $(b + x_3)$ и даст положительный момент. Пара сил с моментом M стремится поворачивать сечение, в котором она действует, против часовой стрелки, это приведет к

изгибу балки выпуклостью вверх, что соответствует отрицательному знаку момента. Следовательно, внутренний момент на третьем участке будет равен

$$M_3 = -R_A \cdot (a + b + x_3) + F_1 \cdot (b + x_3) - M, \quad \text{где } 0 \leq x_3 \leq c.$$

Задаем граничные значения переменной.

$$\begin{aligned} \text{При } x_3 = 0 \quad M_3 &= -R_A \cdot (a + b) + F_1 \cdot b - M = \\ &= -4,25 \cdot 2,5 + 8 \cdot 0,5 - 4 = -10,625 \text{ кНм}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{при } x_3 = c \quad M_3 &= -R_A \cdot (a + b + c) + F_1 \cdot (b + c) - M = \\ &= -4,25 \cdot (2 + 0,5 + 1,5) + 8 \cdot (0,5 + 1,5) - 4 = -5 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Рассмотрим последний четвертый участок. Метод сечений позволяет отбрасывать любую часть рассеченного бруса. Рассечем участок длиной d и отбросим теперь левую часть, оставив для рассмотрения более простую правую часть, на которой действует только одна сила F_2 (рисунок 2, г). Эта сила имеет относительно рассматриваемого сечения плечо x_4 и изгибает этот участок выпуклостью вверх. Следовательно, знак изгибающего момента будет отрицательный.

$$M_4 = -F_2 \cdot x_4, \quad \text{где } 0 \leq x_4 \leq d.$$

$$\text{При } x_4 = 0 \quad M_4 = 0.$$

$$\text{при } x_4 = d \quad M_4 = -F_2 \cdot d = -5 \cdot 1 = -5 \text{ кНм}.$$

Найденные значения изгибающих моментов откладываем на графике, который называется эпюрой изгибающих моментов и наглядно показывает характер распределения величин этих моментов вдоль оси балки. При этом обращаем внимание на то, что на первых трех участках использовалась правосторонняя система координат (т. е. начало координат находилось слева), а на последнем участке использовали левостороннюю систему, когда координата x_4 измерялась справа. Полученная эпюра изгибающих моментов представлена на рисунке 3.

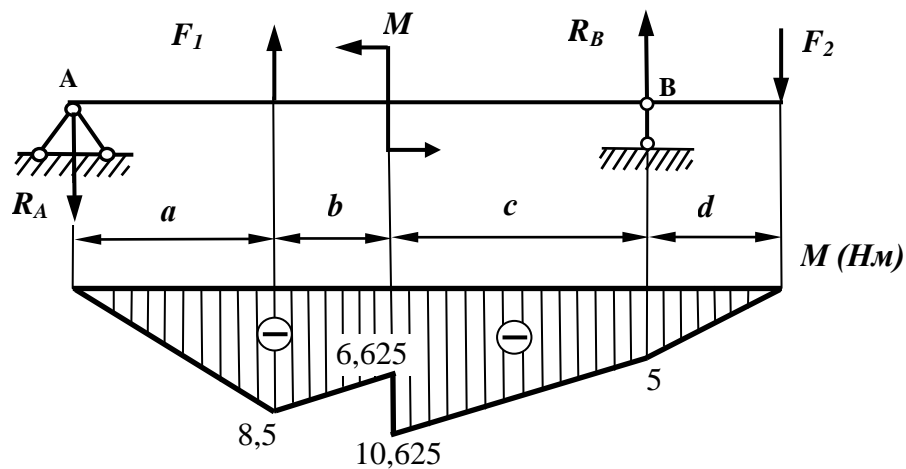


Рисунок 3— Эпюра изгибающих моментов

По эпюре наглядно видно, что опасным является сечение с изгибающим моментом 10,625 кНм. Проектный расчет балки выполняем по этому сечению. Условие прочности при изгибе выглядит так:

$$\sigma = \frac{M}{W_z} \leq [\sigma].$$

Для стальной балки допускаемое напряжение $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Найдем осевой момент сопротивления.

$$W_z \geq \frac{M}{[\sigma]} = \frac{10,625 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 66,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 66,4 \text{ см}^3.$$

Из выражения осевого момента сопротивления для круглого сечения найдем диаметр сечения балки, удовлетворяющий условию прочности.

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} = 66,4 \text{ см}^3.$$

Отсюда диаметр $d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_z}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 66,4}{3,14}} = 8,78 \text{ см}.$

Площадь круглого сечения будет равна

$$A_{кр} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 8,78^2}{4} = 60,5 \text{ см}^2.$$

Найдем сторону a квадратного сечения балки. Момент сопротивления квадратного сечения равен

$$W_z = \frac{a^3}{6} = 66,4 \text{ см}^3.$$

Отсюда $a = \sqrt[3]{6 \cdot W_z} = \sqrt[3]{6 \cdot 66,4} = 7,36 \text{ см}.$

Тогда площадь квадратного сечения балки равна

$$A_{кв} = a^2 = 7,36^2 = 54,2 \text{ см}^2.$$

Определим размеры прямоугольного сечения с отношением высоты к ширине равным двум. Осевой момент сопротивления для прямоугольного сечения равен

$$W_z = \frac{b \cdot h^2}{6},$$

где b - ширина сечения, h – высота сечения.

С учетом заданного соотношения $h/b = 2$ получаем

$$W_z = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{h/2 \cdot h^2}{6} = \frac{h^3}{12} = 66,4 \text{ см}^3.$$

Отсюда

$$h = \sqrt[3]{12 \cdot W_z} = \sqrt[3]{12 \cdot 66,4} = 9,27 \text{ см}.$$

Тогда

$$b = h/2 = 9,27/2 = 4,635 \text{ см}.$$

Следовательно, площадь прямоугольного сечения равно

$$A_{np} = b \cdot h = 4,635 \cdot 9,27 = 43 \text{ см}^2.$$

По таблице сортамента прокатной стали в соответствии с ГОСТ 8239-89 выбираем двутавр №14 с осевым моментом сопротивления $W_z = 81,7 \text{ см}^3$ и площадью поперечного сечения $A = 17,4 \text{ см}^2$. Очевидно, что двутавровое сечение является наиболее экономичным с точки зрения расхода материала. Оценим расход материала для изготовления балок выбранных сечений, сравнивая площадь каждого сечения с площадью двутаврового сечения.

$$\frac{A_{кр}}{A_{дв}} = \frac{60,5}{17,4} = 3,48. \quad \frac{A_{кв}}{A_{дв}} = \frac{54,2}{17,4} = 3,11. \quad \frac{A_{np}}{A_{дв}} = \frac{43}{17,4} = 2,47.$$

С учетом выполненного сравнения площадей расставим их в порядке возрастания расхода материала: наиболее экономичным является двутавровое сечение, затем следует прямоугольное сечение, далее – квадратное, наименее экономичное – круглое сечение, на которое требуется в 3,5 раза больше стали, чем для двутавровой балки.

7 Практическое занятие № 7 «Расчет на совместное действие изгиба с кручением».

Задача

Проверить прочность вала, который изображён на рисунке 1, испытывающего совместное действие кручения и изгиба, на статическую прочность при кратковременных перегрузках в целях предотвращения пластических деформаций.

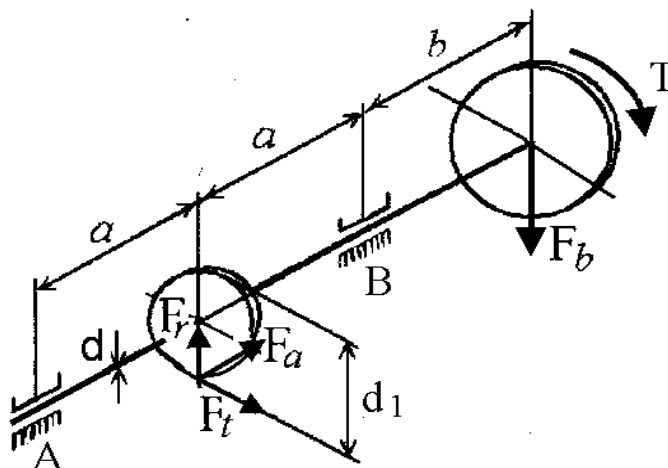


Рисунок 1 – Схема вала

Исходные данные:

схема нагружения вала (рисунок 1);

геометрические размеры: $a = 60$ мм, $b = 90$ мм; диаметр вала $d = 35$ мм, делительный диаметр шестерни $d_1 = 40$ мм.

Силы, действующие на вал со стороны зубчатого зацепления:

окружная $F_t = 1000$ Н;

радиальная $F_r = F_t \cdot \tan 20^\circ / \cos 10^\circ = 1000 \cdot 0,36397 / 0,9848 = 369,6$ Н;

осевая $F_a = F_t \cdot \tan 10^\circ = 1000 \cdot 0,1763 = 176,3$ Н.

Сила, действующая на вал со стороны ременной передачи: $F_b = 1200$ Н.

Крутящий момент, передаваемый валом:

$$T = F_t \cdot d_1 / 2 = 1000 \cdot 40 / 2 = 20 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм}.$$

Материал вала – сталь 45, предел текучести материала вала $\sigma_T = 540$ МПа.

Коэффициент перегрузки $K_n = 1,5$.

Решение

- 1 Составляем расчетную схему вала (рисунок 2,б).
- 2 Строим эпюру крутящего момента $T = 20 \cdot 10^3$ Н·мм (рисунок 2,в).
- 3 Рассматриваем схему вала в двух плоскостях: вертикальной плоскости ХАУ (рисунок 2,г) и горизонтальной плоскости ХАЗ (рисунок 2,е).
- 4 Определяем реакции R_A^y и R_B^y в опорах А и В, действующие в вертикальной плоскости ХАУ (рисунок 2,г). Принято силы F_r и F_a рассматривать в одной плоскости.

$$\sum M_A = 0; \quad R_B^Y \cdot 2a - F_b(2a + b) + F_a \cdot \frac{d_1}{2} + F_r \cdot a;$$

$$R_B^Y = \frac{F_b(2a + b) - F_a \frac{d_1}{2} - F_r \cdot a}{2a} = \frac{1200(120 + 90) - 176,3 \cdot \frac{40}{2} - 369,6 \cdot 60}{2 \cdot 60} =$$

$$= 1885,82 \text{ Н.}$$

$$\sum M_B = 0; \quad F_a \cdot \frac{d_1}{2} - R_A^Y \cdot 2a - F_r \cdot a - F_b \cdot a = 0;$$

$$R_A^Y = \frac{F_a \cdot \frac{d_1}{2} - F_r \cdot a - F_b \cdot b}{2a} = \frac{176,3 \cdot \frac{40}{2} - 369,6 - 1200 \cdot 90}{2 \cdot 60} = -1055,42 \text{ Н.}$$

Отрицательный знак реакции R_A^Y означает, что она направлена в противоположную сторону. Поэтому в расчетной схеме исправляем ее направление.

Выполним проверку: $\sum Y = 0$;

$$F_r - F_b - F_B^Y + F_A^Y = 369,6 - 1200 - 1055,42 + 1885,82 = 0.$$

Равенство выполняется, реакции найдены верно.

5 Определим реакции R_A^Z и R_B^Z в опорах A и B , действующие в горизонтальной плоскости XAZ (рисунок 4,е):

$$\sum M_A = 0; \quad R_B^Z \cdot 2a - F_t \cdot a = 0.$$

$$\sum M_B = 0; \quad -R_A^Z \cdot 2a + F_t \cdot a = 0.$$

Следовательно $R_A^Z = R_B^Z = F_t / 2 = 1000 / 2 = 500 \text{ Н.}$

Выполним проверку: $\sum Z = 0$; $R_A^Z = R_B^Z$.

Равенство выполняется, реакции найдены верно.

6 Строим эпюру изгибающих моментов в вертикальной плоскости XAY (рисунок 2, д). Балку делим на три участка AC , CB , BD . Для этих участков берем сечения x_1 , x_2 , x_3 и составляем уравнения изгибающих моментов.

$$\text{Участок } AC: \quad 0 \leq x_1 \leq a; \quad M_{u1}^Y = -R_A^Y \cdot x_1.$$

$$\text{при } x_1 = 0; \quad M_{u1}^Y = 0.$$

$$\text{при } x_1 = a; \quad M_{u1}^Y = -R_A^Y \cdot a = -1055,42 \cdot 60 = -63325,2 \text{ Н}\cdot\text{мм} = -63,33 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{мм}.$$

$$\text{Участок } CB: \quad a \leq x_2 \leq 2a; \quad M_{u2}^Y = -R_A^Y \cdot x_2 - F_r \cdot (x_2 - a) - F_a \frac{d_1}{2}$$

$$\text{при } x_2 = a;$$

$$M_{u2}^Y = -R_A^Y \cdot a_2 - F_a^Y \frac{d_2}{2} =$$

$$= -1055,42 \cdot 60 - 176,3 \cdot \frac{40}{2} = -63325,2 - 3526 = -66851,2 \text{ Н} \cdot \text{мм} = -66,85 \cdot 10^3$$

Н·мм.

при $x_2 = 2a$;

$$M_{u2}^Y = -R_A^Y \cdot 2a + F_r \cdot a - F_a \frac{d_1}{2} =$$

$$= -1055,42 \cdot 2 \cdot 60 - 369,6 \cdot 60 - 176,3 \cdot \frac{40}{2} = -108000 \text{ Н} \cdot \text{мм} = -108 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм}.$$

Участок ВД :

$$0 \leq x_3 \leq b; \quad M_{u3}^Y = -F_b \cdot x;$$

при $x_3 = 0$; $M_{u3}^Y = 0$;

при $x_3 = b$; $M_{u3}^Y = F_b \cdot b = -1200 \cdot 90 = -108 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм}.$

7 Строим эпюру изгибающих моментов в горизонтальной плоскости ХАЗ (рисунок 2, ж).

Участок АС

$$0 \leq x_1 \leq a; \quad M_{u1}^Z = R_A^Z \cdot x_1;$$

при $x_1 = 0$; $M_{u1}^Z = 0$;

при $x_1 = a$; $M_{u1}^Z = R_A^Z \cdot a = 500 \cdot 60 = 30000 \text{ Н} \cdot \text{мм} = 30 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм};$

Участок СВ

$$a \leq x_2 \leq 2a; \quad M_{u2}^Z = R_A^Z \cdot x_2 - F_t \cdot (x_2 - a);$$

при $x_2 = a$; $M_{u2}^Z = R_A^Z \cdot a = 30 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм};$

при $x_2 = 2a$;

$$M_{u2}^Z = R_A^Z \cdot 2a - F_t \cdot a = 500 \cdot 2 \cdot 60 - 1000 \cdot 60 = 600000 - 600000 = 0$$

Участок ВД : $M_{u3}^z = 0.$

8 Строим суммарную эпюру изгибающих моментов (рисунок 2, з). Для этого определяем значения суммарного изгибающего момента в точках А, В, С, Д по зависимости:

$$M_{u\Sigma} = \sqrt{M_{uXOY}^2 + M_{uXOZ}^2};$$

точка А, $M_{u\Sigma A} = 0$;

точка С, $M_{u\Sigma C1} = \sqrt{(-63,33)^2 + (30 \cdot 10^3)^2} = 70 \text{ Н} \cdot \text{мм};$

$$M_{u\Sigma C2} = \sqrt{(-66,85 \cdot 10^3)^2 + (30 \cdot 10^3)^2} = 73,27 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм};$$

точка В, $M_{и\Sigma В} = \sqrt{(-108 \cdot 10^3)^2 + 0^2} = 108 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм}$.

9 Из анализа эпюр (рисунок 2, в, з) видно, что наиболее опасным является сечение вала в точке В. В этой точке действует максимальный суммарный изгибающий момент $M_{и\Sigma \max} = 108 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм}$ и крутящий момент $T = 20 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм}$.

Сечение вала в точке В находится в сложном напряженном состоянии. Эквивалентное напряжение $\sigma_{\text{экв}}$ в этом сечении определяем по четвертой теории прочности

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3\tau_{\max}^2},$$

где σ_{\max} – максимальное касательное напряжение, возникающее от изгиба вала;

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{и\Sigma \max}}{W_z};$$

W_z – осевой момент сопротивления сечения вала, который для круглого вала равен $W_z = 0,1d^3 = 0,1 \cdot 35^3 = 4287,5 \text{ мм}^3$.

$$\sigma_{\max} = \frac{108 \cdot 10^3}{4287,5} = 25,2 \text{ МПа};$$

τ_{\max} – максимальное касательное напряжение, возникающее от кручения;

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p};$$

W_p – полярный момент сопротивления сечения вала, который для круглого вала равен: $W_p = 0,2d^3 = 0,2 \cdot 35^3 = 8575 \text{ мм}^3$.

$$\tau_{\max} = \frac{20 \cdot 10^3}{8575} = 2,33 \text{ МПа}.$$

Тогда получим $\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{25,2^2 + 3 \cdot 2,33^2} = 25,5 \text{ МПа}$.

10 Определяем эквивалентное напряжение $\sigma_{\text{экв } n}$ с учетом перегрузок.

$$\sigma_{\text{экв } n} = \sigma_{\text{экв}} \cdot K_n = 25,5 \cdot 1,5 = 38,25 \text{ МПа}.$$

Для статической прочности вала при кратковременной перегрузке должно выполняться условие

$$\sigma_{\text{экв } n} \leq [\sigma],$$

где $[\sigma] = 0,8\sigma_T = 0,8 \cdot 540 = 423 \text{ МПа}$;

$$\text{Получим } 38,25 \text{ МПа} \leq 423 \text{ МПа}.$$

Условие статической прочности вала при кратковременной перегрузке выполняется.

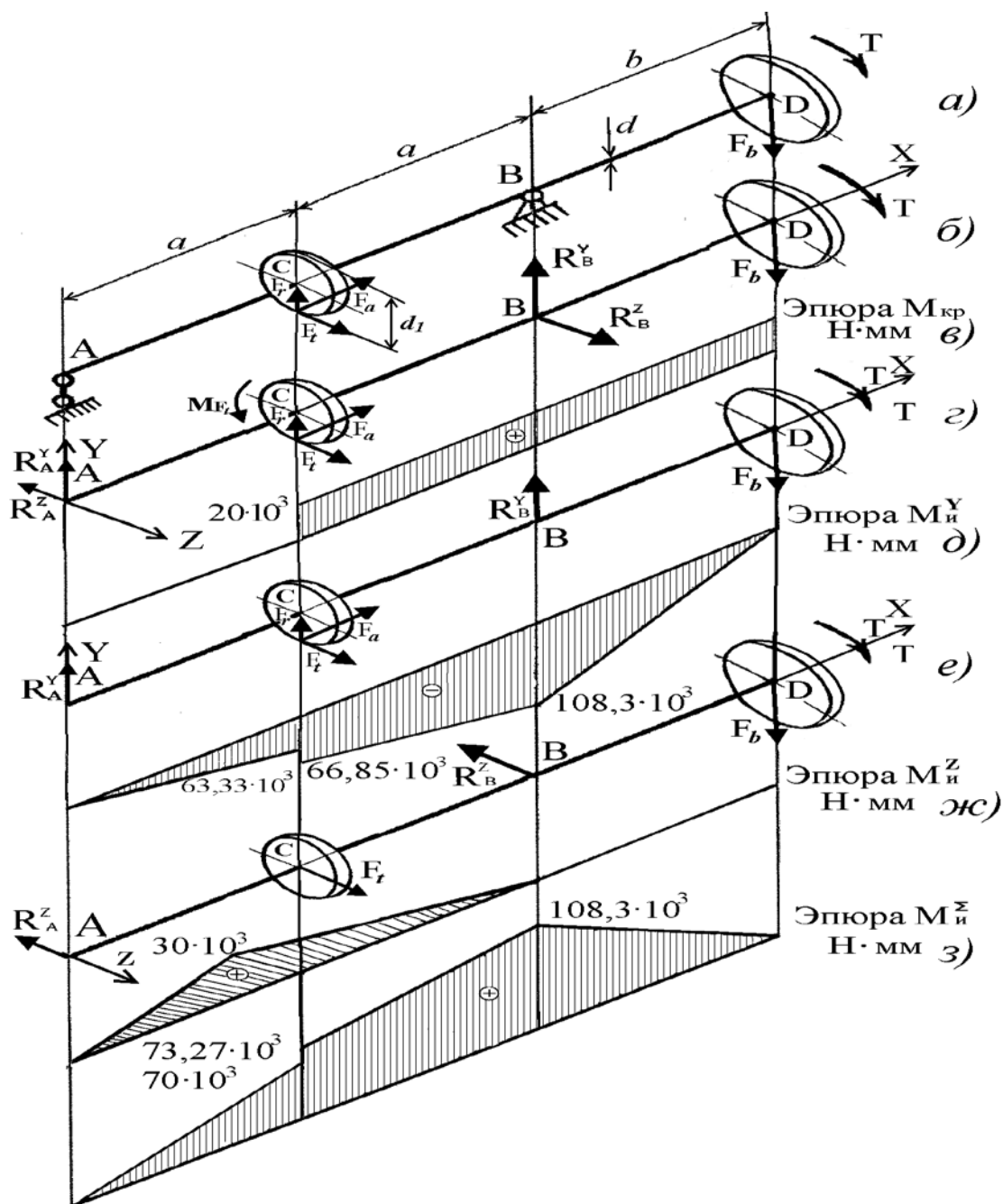


Рисунок 2 Построение эпюр изгибающих и крутящих моментов

Список литературы

- 1 Иосилевич Г.Б. Прикладная механика: учебное пособие / Иосилевич Г.Б., Лебедев П.А., Стреляев В.С. – М.: Машиностроение, 2012. – 576 с.