Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Майкопский государственный технологический университет»
филиал в пгт Яблоновский

Кафедра инженерных дисциплин и таможенного дела

ГИДРАВЛИКА

Методические указания к практическим занятиям для студентов (бакалавров) всех форм обучения

пгт Яблоновский
2021

УДК 662.271.63 (07)
ББК 31.56
Г-46

Гидравлика: методические указания к практическим занятиям для студентов (бакалавров) всех форм обучения / Майкопский гос. технолог. ун-т (филиал в пгт Яблоновский); сост.: А.В. Бунякин. – 2021. – 14 с. без приложения

Приведены примеры решения задач, являющихся типовыми для преподаваемой дисциплины.

Рис. 6. Библиогр.: 3 назв.

Содержание

УСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

1. Задачи из подраздела «Гидростатика» требуют нахождения сил и моментов сил давления на стенки в покоящейся жидкости. Сила гидростатического давления на поверхность ***S*** может быть вычислена по формуле

$$\vec{F} = \iint\limits_S p\vec{n}dS\ .$$

Здесь: $\boldsymbol{p = p_0 - \rho g z}$; $\boldsymbol{n}$ – внешняя единичная нормаль к поверхности ***S*** (под внутренней частью, ограниченной поверхностью подразумевается та, где находится жидкость); $\boldsymbol{\rho}$ - плотность жидкости; $\boldsymbol{g}$ – ускорение свободного падения; $\boldsymbol{p_0}$ – давление на поверхности жидкости (при $\boldsymbol{z = 0}$); z – вертикальная координата (положительна при направлении вверх).

Вычисление этого интеграла приводит к тому, что составляющие силы выражаются через набор геометрических величин:

$$F_x = \sum\left(p_0 + \rho g z_x\right)S_x\ ;\ F_y = \sum\left(p_0 + \rho g z_y\right)S_y\ ;$$

$$F_z = p_0\sum S_z - \rho g\sum V\ . \qquad (1)$$

$S_{x,y,z}$ - это площади нечетнолистных частей ортогональной проекции поверхности ***S*** на плоскость вдоль положительных направлений осей ***X, Y, Z***, соответственно. Причем в сумме каждая из этих площадей берется со знаком плюс, если проекционные линии пересекают поверхность ***S*** большее число раз изнутри наружу, и со знаком минус, если наоборот (снаружи внутрь).

Выражение «нечетнолистная часть проекции» означает, что каждой точке проекции соответствует нечетное число точек поверхности ***S***.

$\sum V$ – означает сумму объемов проекционных цилиндров, которые образуются при проекции поверхности ***S*** в положительном направлении оси ***Z***, причем каждый из этих объемов берется со знаком плюс, если проекционные линии пересекают его границу (часть поверхности ***S***) изнутри наружу, и со знаком минус – если наоборот, снаружи вовнутрь.

Пример решения задачи:

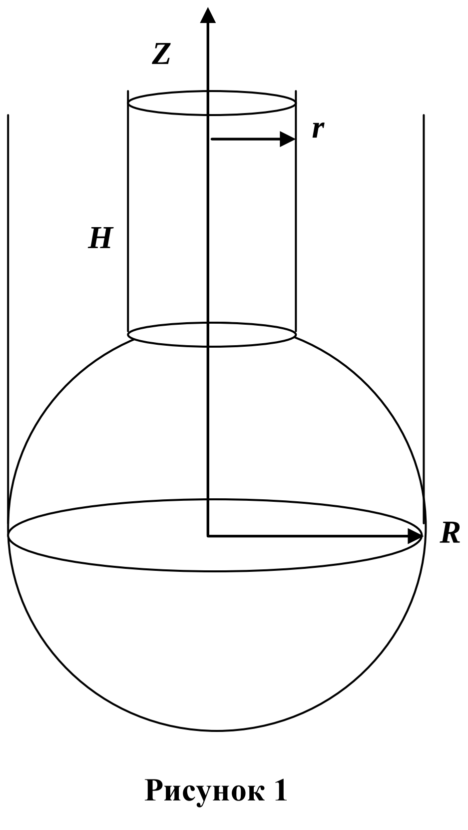


Рисунок 1

Открытая колба, состоящая из сферической части радиуса ***R***, цилиндрической части радиуса ***r*** и высоты ***H***, до верха заполнена жидкостью плотности ρ (рис.1). Найти силу гидростатического давления, действующую на верхнюю половину сферической части (расположенную выше экваториального круга).

Из симметрии задачи можно заключить, что искомая сила действует вертикально вверх, т.е. необходимо найти только составляющую силы F_z.

Тело давления – это объем, в котором нет жидкости, расположенный ниже плоскости свободной поверхности и выше верхней полусферы. Он ограничен вертикальным цилиндром радиуса ***R***. Его величина приближенно равна

$V \approx \pi R^2(H+R) - \pi r^2 H - \frac{2}{3}\pi R^3$, тогда $F_z = \rho g V$.

Приближенно, потому что в этом выражении два раза вычтен объем линзы, получаемой пересечением сферы радиуса ***R*** и цилиндра радиуса ***r***. Для получения точного значения необходимо вычислить объем этой линзы, что фактически равносильно вычислению искомой силы непосредственным интегрированием по поверхности сферы. Для интегрирования выберем сферическую систему координат с центром в центре сферы и углом «широты», отмеряемым от оси симметрии, тогда обозначив $\psi_0 = \arcsin\frac{r}{R}$; $p_c = \rho g\left(H + R - R\cos\psi\right)$; $n_z = \cos\psi$,

$dS = 2\pi R \sin\psi \, R\, d\psi$ - элемент площади, получим следующее выражение для вертикальной составляющей силы:

$$F_z = \rho g \int_{\psi_0}^{\pi/2} \cos\psi\left(H + R - R\cos\psi\right) 2\pi R \sin\psi R d\psi =$$

$$= \rho g R^2 2\pi \int_{\psi_0}^{\pi/2} \left((H+R)\frac{\sin 2\psi}{2} - R\cos^2\psi \sin\psi \right) d\psi =$$

$$= \rho g R^2 2\pi \left(-(H+R)\frac{\cos 2\psi}{4} + R\frac{\cos^3\psi}{3} \right)\Bigg|_{\psi=\psi_0}^{\psi=\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\rho g R^2 (H+R)(1+\cos 2\psi_0) - \rho g \frac{2\pi}{3} R^3 \cos^3\psi_0$$

Видно, что при $\psi_0 \to 0$ это стремится к $F_z = \rho g V$ при $r = 0$, что соответствует смыслу.

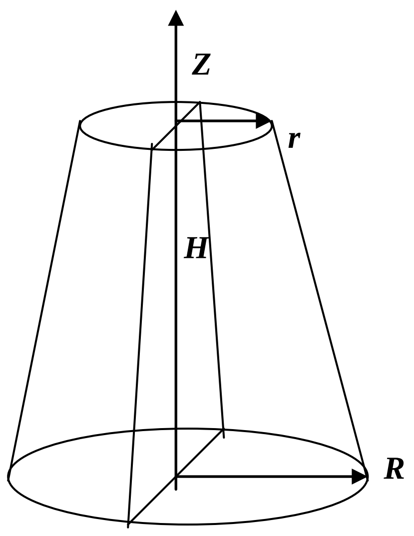


Рисунок 2

Пример решения задачи:

открытый резервуар в форме усеченного конуса доверху заполнен жидкостью плотности ρ. Радиусы большего и меньшего оснований конуса соответственно равны R, r, высота $\boldsymbol{H}$.

Найти силу гидростатического давления, действующую на половину конической поверхности.

Искомая сила имеет две составляющие, вертикальную F_z и горизонтальную F_x. Тело давления – это объем **V**, образованный вертикальными отрезками, заключенными между плоскостью поверхности жидкости и конической поверхностью, внутри которого жидкости нет.

$F_z = \rho g V = \dfrac{1}{2}\rho g\left(\pi R^2 H - (R+h)\dfrac{\pi R^2}{3} + h\dfrac{\pi r^2}{3}\right)$, где $\boldsymbol{h}$ - расстояние от вершины конуса до поверхности жидкости, определяемое как: $\dfrac{h}{h+H} = \dfrac{r}{R}$.

Горизонтальная составляющая будет такой же, как сила, действующая на воображаемую вертикальную стенку, образованную сечением резервуара плоскостью его симметрии. Если обозначить $S = H(r+R)$ - площадь этого сечения, $p_c = -\rho g(h + z_c)$ - избыточное давление в его геометрическом центре, тогда $F_x = p_s S$ и остается вычислить координату этого центра (здесь уже **z=*0*** – это вершина конуса).

$$z_c = \frac{1}{H(r+R)}\int_{-h-H}^{-h} z\frac{(-2z)}{H+h}R dz = \frac{-2R}{H(H+h)(r+R)}\left.\frac{z^3}{3}\right|_{z=-H-h}^{z=-h} =$$

$$= \frac{-2R}{3(r+R)}\left(\frac{(h+H)^2}{H} - \frac{h^3}{H(h+H)}\right)$$

В некоторых задачах необходимо вычислить моменты сил.

Момент силы гидростатического давления жидкости или газа на поверхность S относительно точки $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ может быть вычислен по формуле ($\vec{r} = (x, y, z)$ - переменная точка интегрирования):

$$\vec{M} = \iint_S p[\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0]\, dS = -\rho g \iint_S z[\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0]\, dS$$

Закон Архимеда гласит, что выталкивающая (архимедова) сила, действующая на тело вертикально вверх, равна весу жидкости в объеме его погруженной части, что непосредственно получается из формул (1). Точка приложения архимедовой силы совпадает с геометрическим центром погруженной части (центр плавания).

Условие остойчивости (устойчивости тела на поверхности жидкости) состоит в том, что центр тяжести тела должен быть не выше центра плавания. Остойчивость обретается при совпадении этих центров.

2. Задачи подраздела «Установившиеся течения в гидравлическом приближении» – это задачи на применение уравнения Бернулли. Уравнение Бернулли для несжимаемой жидкости может быть записано только при условии установившегося течения.

Для линии тока:

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} \to const\ (\textit{вдоль линии тока}) \quad \textit{при} \quad \mathrm{Re} = \frac{VL}{\nu} \to \infty$$

Здесь: $\boldsymbol{\rho}$ - плотность, $\boldsymbol{p}$ – давление (считается постоянным в каждом из сечений); $\boldsymbol{z}$ – вертикальная координата центра сечения; V, L - характерные

скорость и линейный размер, ν - кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Для двух сечений трубопровода 1-2 (гидравлическое приближение):

$$z_i + \frac{p_i}{\rho g} + \alpha \frac{V_i^2}{2g} = H_i \quad ; \quad H_1 - H_2 = \Delta h \, .$$

При этом $V_i = Q / S_i$ – средние по сечению скорости жидкости; Q – объемный расход через поперечное сечение трубопровода; S_i - площади сечения потока; $\alpha \approx 2$ для ламинарного течения, $\alpha \approx 1$ при $\mathrm{Re} >> 1$; давление считается постоянным в каждом из сечений; здесь: Δh_{12} - это гидравлические потери или потери напора (полного напора).

Для приближенных расчетов можно полагать $\alpha = 1$;

$$\Delta h = \sum_i \lambda_i \frac{L_i}{d_i} \frac{V_i^2}{2g} + \sum_j \zeta_j \frac{V_j^2}{2g} ; \quad V_i = \frac{4Q}{\pi d_i^2} ;$$

L_i, d_i - длины и диаметры линейных участков трубопровода.

$\lambda = f\left(\mathrm{Re}, \frac{\Delta}{d} \right)$ - коэффициент гидравлического трения или сопротивления по длине (Δ - абсолютная шероховатость стенок трубы). Считается, что функция f – это известная эмпирическая зависимость, задаваемая, например, следующими формулами:

$\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}}$ при ***Re* < *2320* –** формула Стокса,

$\lambda = \frac{0{,}3164}{\mathrm{Re}^{0{,}25}}$ при ***4000*** < ***Re*** < $20\frac{d}{\Delta}$ - формула Блазиуса,

$\lambda = 0{,}11\left(\frac{\Delta}{d} + \frac{68}{\mathrm{Re}} \right)^{0{,}25}$ при $20\frac{\mathrm{d}}{\boldsymbol{\Delta}}$ < Re < $500\frac{\mathrm{d}}{\boldsymbol{\Delta}}$ - формула Альтшуля,

$\lambda = 0{,}11\left(\frac{\Delta}{\mathrm{d}} \right)^{0{,}25}$ при ***Re*** > $500\frac{d}{\Delta}$ - формула Шифринсона.

ς_i - коэффициенты местных сопротивлений, являющиеся в общем случае, функцией ***Re*** и безразмерных параметров, характеризующих геометрическую форму местного сопротивления, но при больших ***Re*** зависимостью от ***Re*** можно пренебречь (находятся по справочникам).

Точки (поперечные сечения потока), для которых записывается уравнение Бернулли, выбираются так, чтобы в одну из частей равенства входила неизвестная величина, причем сечениями трубопровода могут считаться и поверхности резервуаров (баков), где скорость считается равной нулю. При этом вход из резервуара в трубопровод и выход из трубопровода в резервуар считаются местными сопротивлениями с коэффициентом равным ***0.5*** и ***1.0***, соответственно.

Пример решения задачи:

поршень цилиндра площадью ***S*** (без учета трения) нагружен силой ***F***. В поршне имеется отверстие, из которого вырывается вертикальная струя, которая соударяется с горизонтальной плоскостью на высоте ***H*** от поршня. Плотность жидкости ρ, коэффициент гидравлического сопротивления входа в отверстие $\varsigma_0 \approx 0.5$. Пренебрегая толщиной поршня по сравнению с высотой струи, скоростью поршня по сравнению со скоростью струи и трением струи о воздух, найти максимальное давление струи на стенку.

Запишем уравнение Бернулли с гидравлическими потерями для точек ***(i,j)***:

$$z_i + \frac{p_i}{\rho g} + \frac{V_i^2}{2g} = z_j + \frac{p_j}{\rho g} + \frac{V_j^2}{2g} + \Delta h_{ij} \, .$$

Точка 1 расположена под поршнем вдали от отверстия, точка 2 – на выходе струи, точка 3 – на вершине струи, где давление будет максимальным (в точке торможения). Пусть p_0 - атмосферное давление, тогда по условию задачи: $z_3 - z_2 = H$; $z_2 = z_1$; $p_1 = p_0 + \dfrac{F}{S}$; $p_2 = p_0$; $p_3 = p_0 + \Delta p$

$V_1 = V_3 = 0$; $V_2 = V$. Гидравлические потери $\Delta h_{12} = \Delta h_{13} = \varsigma_0 \dfrac{V^2}{2g}$. Записав уравнение Бернулли для точек (1,3), получим:

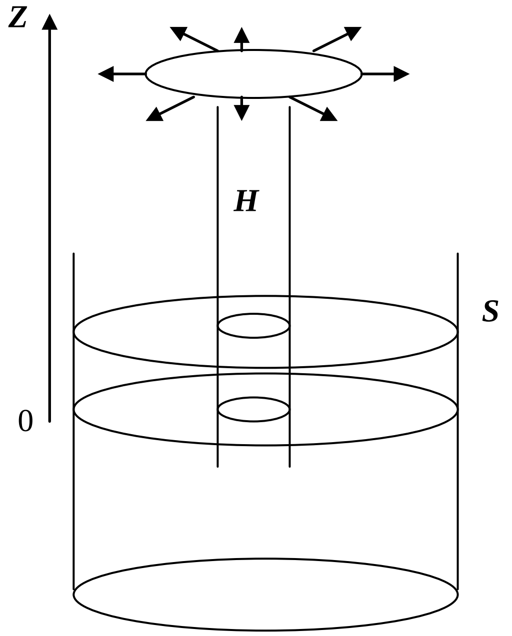


Рисунок 3

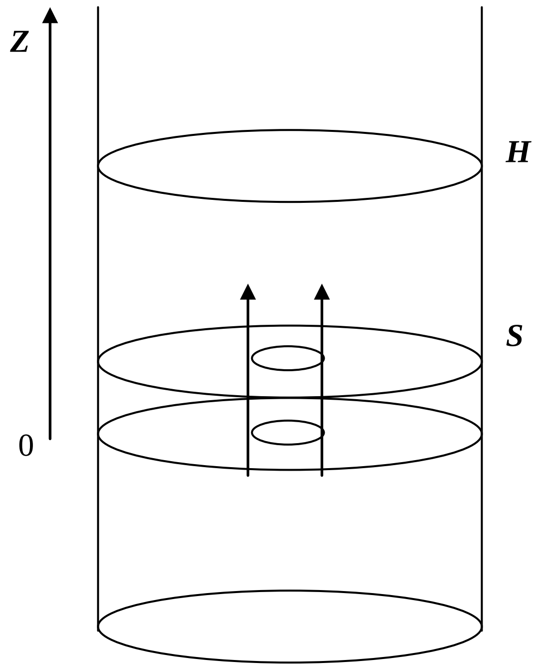


Рисунок 4

$\dfrac{F}{\rho g S} = H + \dfrac{\Delta p}{\rho g} + \varsigma_0 \dfrac{V^2}{2g}$, для точек (1,2), соответственно:

$\dfrac{F}{\rho g S} = (1+\varsigma_0)\dfrac{V^2}{2g}$ Из этих двух уравнений получим искомое Δp:

$$\frac{F}{\rho g S} = H + \frac{\Delta p}{\rho g} + \frac{\varsigma_0}{1+\varsigma_0}\frac{F}{\rho g S} \quad ; \quad \Delta p = \frac{F}{S}\cdot\frac{1}{1+\varsigma_0} - \rho g H \ .$$

Пример решения задачи:

Поршень цилиндра площадью ***S*** (без учета трения) нагружен силой ***F***. В поршне имеется отверстие, из которого истекает струя под уровень ***H***. Пренебрегая толщиной поршня по сравнению с ***H*** и скоростью поршня по сравнению со скоростью течения внутри отверстия, найти скорость внутри отверстия.

Уравнение Бернулли, записанное для точки 1, расположенной под поршнем вдали от отверстия, и точки 2 на свободной поверхности даст следующее: $z_2 - z_1 = H \quad ; \quad p_1 = p_2 + \rho g H + \dfrac{F}{S} \quad ; \quad V_1 = V_2 = 0$. Отсюда

$\dfrac{F}{\rho g S} = (\varsigma_0 + \varsigma_1)\dfrac{V^2}{2g}$, где ***V***-скорость течения внутри отверстия; ς_1- коэффициент местного сопротивления на выходе из отверстия.

Сопоставление этого соотношения с аналогичным уравнением для точек 1 и 2 в предыдущей задаче приведет к следующему выводу: $\varsigma_1 = 1$, что хорошо согласуется с экспериментом.

3. Задачи подраздела «Стационарный расчет сложного трубопровода» – это задачи на расчет напорных трубопроводных сетей. Решение их заключается в составлении системы уравнений для нахождения неизвестных величин (расходов и давлений в промежуточных узлах). Для этого необходимо сделать следующее:

а) занумеровать все узлы сети, включая концевые (входы и выходы);

б) занумеровать звенья сети парами индексов ***i*** - начальный, ***j*** -конечный узлы (т.е. ориентировать граф сети стрелками нумерации);

в) на каждом звене, соединяющем узлы ***i, j***, записать уравнение потерь напора по длине (местными потерями пренебрегаем):

$$h_i - h_j = \frac{8\lambda_{ij}L_{ij}}{\pi^2 g d_{ij}^5} Q_{ij}\left|Q_{ij}\right| \qquad (2)$$

Здесь $h_i = z_i + \dfrac{p_i}{\rho g}$ - напор в ***i*** - том узле; $\boldsymbol{Q_{ij}}$ – расход на звене, соединяющем узлы с номерами ***i,j***. Уравнение (2) записано так, чтобы можно было учесть направление расхода (если в результате численного решения составленной системы уравнений для расчета трубопроводной сети $\boldsymbol{Q_{ij}}$ окажется отрицательным, то течение происходит в сторону, противоположную нумерации ***i,j***);

г) в каждом промежуточном узле записывается уравнение баланса расходов (сумма расходов с учетом их знаков равна нулю), например:

$Q_{in} - Q_{nj} - Q_{nk} = 0$ для узла «***n***» промежуточного для узлов «***i, j, k***».

Таким образом, количество уравнений получается равным сумме количества звеньев и промежуточных узлов. Неизвестных столько же, например, расходы на звеньях и напоры в промежуточных узлах. Для какого–либо концевого узла может быть задан расход, тогда напор там неизвестен.

Длины $\boldsymbol{L_{ij}}$, диаметры $\boldsymbol{d_{ij}}$, коэффициенты гидравлического трения λ_{ij} на всех звеньях и высотные отметки $\mathbf{z_{ij}}$ всех узлов считаются заданными.

Решение получаемой системы алгебраических уравнений второго порядка может быть произведено численным методом, например, итерациями Ньютона, но в контрольное задание это не входит.

В реальной ситуации λ_{ij} заранее не заданы, а вместо них заданы шероховатости труб. Тогда алгоритм решения представляет собой уже две вложенные одна в другую итерационные процедуры. Так, λ_{ij} сначала задаются одинаковыми в диапазоне их наиболее часто встречающихся значений (от ***0.02*** до ***0.03*** для водопроводных и т. п. труб). Система уравнений решается с некоторой точностью, после чего находятся числа Рейнольдса в каждой из труб, а по ним, из эмпирических зависимостей, находятся λ_{ij}. С этими «новыми» значениями λ_{ij} снова решается система, и т.д., пока изменения расходов на звеньях сети не станут меньше заданной погрешности. Такая внешняя итерационная процедура сходится довольно быстро.

Пример решения задачи.

Для следующей схемы соединения сети трубопроводов написать систему уравнений для определения расходов при заданных давлениях в концевых узлах.

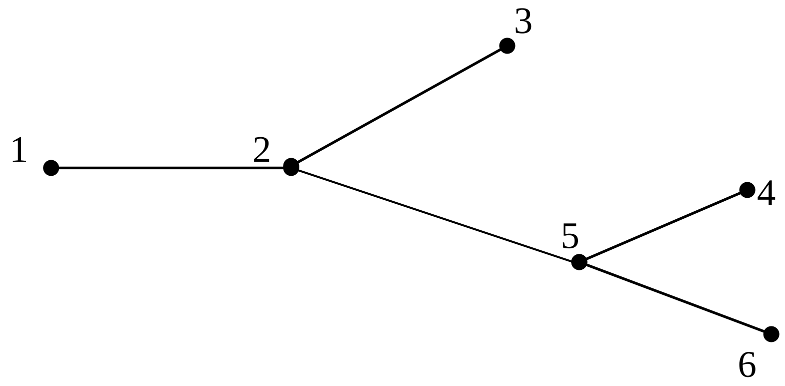


Рисунок 5

Уравнения типа $h_i - h_j = \dfrac{8\lambda_{ij} L_{ij}}{\pi^2 g d_{ij}^5} Q_{ij}\left|Q_{ij}\right|$, $h_i = z_i + \dfrac{p_i}{\rho g}$ составим для следующих звеньев сети ***(i, j)=(1,2),(2,3),(2,5),(5,4),(5,6)*** - пять штук.

Добавим уравнения баланса расходов для двух промежуточных узлов:

$Q_{12} - Q_{23} - Q_{25} = 0$, $Q_{25} - Q_{54} - Q_{56} = 0$.

Получится система семи уравнений с семью неизвестными Q_{ij} ***:(i,j)=(1,2),(2,3),(2,5),(5,4),(5,6)***, p_2, p_5.

4. Задачи подраздела «Стационарный расчет русловых сетей» - это задачи на составление системы уравнений для расчета сети каналов (открытых русел). Используется модель установившегося движения жидкости со свободной поверхностью по сети каналов, каждый из которых имеет постоянное поперечное сечение, постоянный уклон дна и длину, значительно превосходящую ширину. Решение заключается в составлении системы уравнений для нахождения неизвестных величин (расходов и глубин в промежуточных узлах), которая во многом похожа на систему уравнений для сети трубопроводов. Для этого необходимо:

а) занумеровать все узлы сети, включая концевые (входы и выходы),

б) занумеровать звенья сети парами индексов ***i*** - начальный, ***j*** - конечный узлы (т.е. ориентировать граф сети стрелками нумерации),

в) на каждом звене, соединяющем узлы ***i,j***, записать уравнение:

$$z_i + h_i - z_j - h_j = f_{ij} \frac{L_{ij} Q_{ij}\left|Q_{ij}\right|}{g^2 D_{ij}^5}.$$

Здесь: z_i - это высотные отметки дна каналов в узловых точках сети (считаются заданными), h_i - это глубины в этих точках (неизвестны). Длины каналов L_{ij}, как и линейные размеры поперечных их сечений D_{ij}, считаются заданными. Под размером поперечного сечения может подразумеваться, например, ширина основания дна, если канал имеет трапецеидальное сечение. Последнее уравнение записано так, чтобы можно было учесть направление расхода (если при численном решении $\boldsymbol{Q_{ij}}$ окажется отрицательным, то течение происходит в сторону, противоположную нумерации ***i,j***);
г) в каждом промежуточном узле записывается уравнение баланса расходов (сумма расходов с учетом их знаков равна нулю), например:
$Q_{in} - Q_{nj} - Q_{nk} = 0$ для узла «***n***» промежуточного для узлов «***i,j,k***».

При решении задач этого подраздела коэффициенты гидравлического трения каналов $\boldsymbol{f_{ij}}$ для всех звеньев сети считаются заданными, при этом число уравнений в полученной системе равно сумме числа звеньев сети и числа промежуточных узлов. Неизвестны так же – расходы $\boldsymbol{Q_{ij}}$ и глубины h_i в промежуточных узлах. Высотные отметки всех узлов $\mathbf{z_i}$ и глубины h_i в концевых узлах при этом считаются заданными. Как и в случае расчета трубопроводной сети, эта система уравнений может быть решена численно методом Ньютона, но в контрольное задание это не входит.

Поскольку коэффициенты трения $\boldsymbol{f_{ij}}$ заранее не известны, к системе уравнений должны быть добавлены эмпирические соотношения для них, которые могут иметь, например, следующий вид:

$$f_{ij} = F\left(\frac{h_i + h_j}{D_{ij}}\right).$$

Решение задачи расчета сети каналов при этом сведется к двойной итерационной процедуре, подобно той, что реализуется для сети трубопроводов.

5. Задачи подраздела «Течения в руслах переменного сечения и гидравлический прыжок» – это задачи на применение уравнения критического режима. Критический режим – это состояние перехода потока со свободной поверхностью от бурного к спокойному течению или наоборот (например, при изменении расхода).

Безразмерный параметр, называемый числом Фруда $Fr = \frac{V^2}{gS}\frac{\partial S}{\partial h}$, позволяет моделировать этот переход (условие перехода ***Fr=1***). Здесь: $V = \frac{Q}{S}$ - средняя скорость течения; $S(h, A_i)$ - функция зависимости площади поперечного сечения от глубины $\boldsymbol{h}$ и $\boldsymbol{A_i}$ - набора геометрических параметров, характеризующих форму сечения русла. Под этими параметрами могут подразумеваться, например, ширина основания, если русло трапецеидальное, или диаметр, если русло – это водопропускная труба.

Задачи этого подраздела Течения в руслах переменного сечения» – это задачи на определение формы поверхности при одномерном приближении для течения идеальной жидкости со свободной поверхностью в русле прямоугольного поперечного сечения. Для их решения надо записать уравнение Бернулли (без гидравлических потерь) для линий тока, проходящих по поверхности, и уравнение постоянства расхода, скорость течения считается одинаковой на всём сечении потока.

Пример решения задачи.

При заданном расходе $\boldsymbol{Q}$ и ширине $\boldsymbol{b}$ русла прямоугольного поперечного сечения определить глубину ***h***, при которой происходит переход течения от бурного к спокойному состоянию и наоборот. Функция ***S=hb***, поэтому уравнение критического режима имеет вид:

$$Fr = \frac{V^2}{gS}\frac{\partial S}{\partial h} = \frac{V^2 b}{ghb} = \left(\frac{Q}{hb}\right)^2 \frac{1}{gh} = 1 \Rightarrow Q = \sqrt{gb^2h^3}\ .$$

Задачи подраздела «Гидравлический прыжок» – это задачи на использование системы уравнений одномерного гидравлического прыжка:

$(V_1 + u)S(h_1) = (V_2 + u)S(h_2) = Q \quad ; \quad (V_1 - V_2)Q = F(h_2) - F(h_1)$ Здесь V_1, V_2 - скорости до и после прыжка; ***u*** – это скорость самого гидравлического прыжка, ***S***, ***F*** – функции, определяющиеся формой поперечного сечения русла:

$$S(h) = \int_0^h b(z)dz \quad ; \quad F(h) = g\int_0^h zb(z)dz$$

Функция ***b(z)*** – это функция зависимости ширины от глубины **z** (см. рис. 6) **z** – отмеряется от свободной поверхности вертикально вниз.

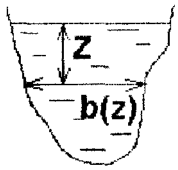


Рисунок 6

Пример решения задачи.

В русле прямоугольного поперечного сечения ширины ***b*** заданы глубины до и после прыжка h_1, h_2 и скорость до прыжка V_1. Написать условие, связывающее эти величины, при котором гидравлический прыжок возможен.

Функции ***S=hb***, $F = gb\frac{h^2}{2}$, уравнения гидравлического прыжка в русле прямоугольного поперечного сечения:

$$(V_1 - u)h_1 = (V_2 - u)h_2 = q \quad ; \quad (V_1 - V_2)q = \frac{g}{2}(h_2^2 - h_1^2)\,.$$

Отсюда найдем:

$$u = \frac{V_1h_1 - V_2h_2}{h_2 - h_1}\text{,тогда } \left(V_1 + \frac{V_1h_1 - V_2h_2}{h_2 - h_1}\right)V_1h_1 - \left(V_2 + \frac{V_1h_1 - V_2h_2}{h_2 - h_1}\right)V_2h_2 =$$

$$= \frac{V_1h_2 - V_2h_2}{h_2 - h_1}V_1h_1 - \frac{-V_2h_1 + V_1h_1}{h_2 - h_1}V_2h_2 = \frac{(V_1 - V_2)^2 h_1h_2}{h_2 - h_1} =$$

$$= \frac{g}{2}(h_2 - h_1)(h_2 + h_1)$$

$V_1 - V_2 = \sqrt{\frac{g(h_1 + h_2)}{h_1h_2}}(h_2 - h_1)$, таким образом, искомое условие, равносильное условию положительности скорости за прыжком, $V_2 > 0$, имеет вид: $V_1 > \sqrt{\frac{g(h_1 + h_2)}{h_1h_2}}(h_2 - h_1)$.

Список литературы

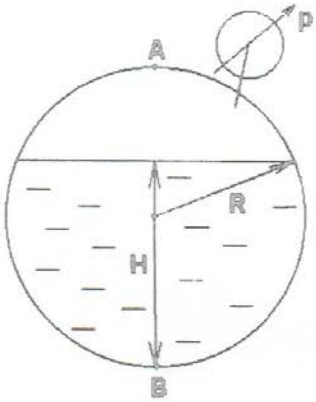
1. Чугаев Р.Р. Гидравлика.– Л.: Энергоиздат, 1982.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1973.
3. Константинов Ю.М. Гидравлика, гидрология, гидрометрия 1,2. – М.: Наука 1983

Заключение

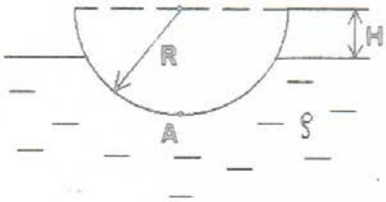
Даны методические указания для изучения (проработки лекций и выполнение практических заданий) дисциплины «Гидравлика и нефтегазовая гидромеханика», включающие решение наиболее характерных задач и необходимые для этого теоретические сведения.

Приложение (задачи 1 – 50)

Задачи

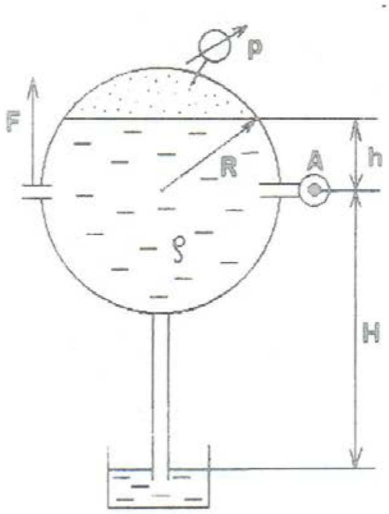


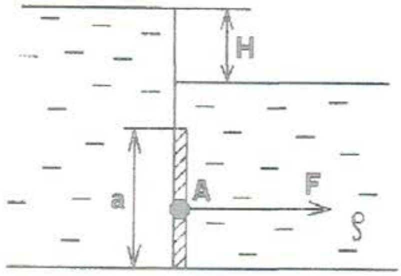
1.Цистерна радиуса R длины L заполнена на глубину H жидкостью плотности ρ. Пренебрегая жёсткостью стенок, определить усилия, действующие на сварные швы «A,B». Избыточное давление в газовой полости над поверхностью жидкости «p».



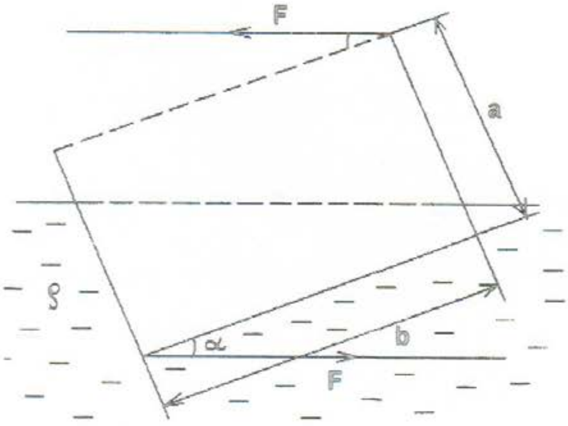
2.Полуцилиндрический понтон радиуса R и длины L погружён так, что уровень жидкости плотности ρ ниже его осевой линии на высоту «H». Определить момент сил, изгибающей понтон по сварному шву «A», пренебрегая жёсткостью стенок, но учитывая их вес.

3.Сферический герметичный сосуд радиуса R может открываться полусферической крышкой, снабжённой шарниром A. Из сосуда ведёт трубка, опущенная в открытую емкость. Поверхность в ней расположена на уровне H ниже центра сферического сосуда. Определить усилие F, необходимое для открывания крышки, если жидкость имеет плотность ρ. Вакуум на поверхности жидкости «p»

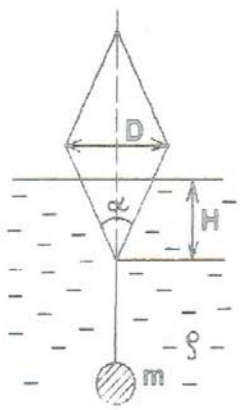




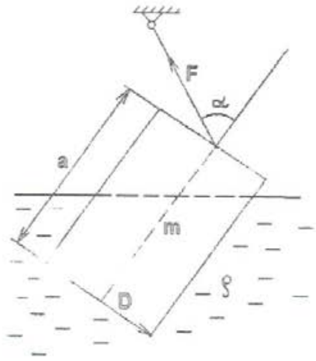
4.Поворотный затвор расположен в основании плотины и разделяет уровни жидкости разности «H». Высота затвора «a», ширина плотины b, плотность жидкости ρ. Определить усилие на шарнир A и место его расположения, при котором момент сил давления равен нулю. Весом затвора пренебречь.



5.Прямоугольный понтон массы m, длины L, ширины b, высоты «a» накренён на угол α с помощью двух тросов, считая, что тросы расположены горизонтально, плотность жидкости ρ. Определить усилия, действующие на тросы F.

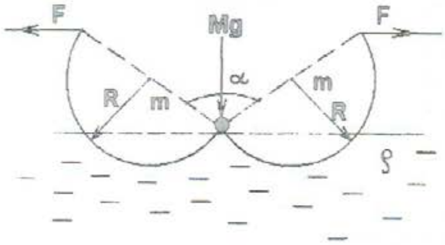


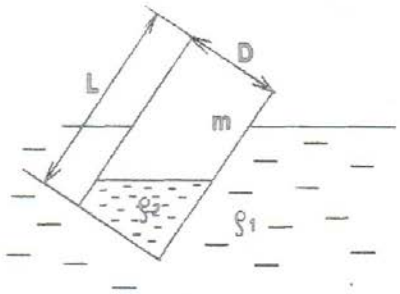
6. Конический буй массы «M», диаметра D с углом при вершине α плавает в жидкости плотности ρ. Определить минимальную массу m, которую необходимо подвесить, чтобы буй плавал в вертикальном положении и глубину погружения его вершины при этом.



7. Цилиндрический буй диаметра D, длины «а» и массы m плавает не вертикально. Определить усилие F троса, если угол его отклонения от оси цилиндра α. Плотность жидкости ρ. Написать соотношение между величинами «а», D, m, ρ, при котором это возможно.

8. Два полуцилиндрических понтона соединены шарнирно по боковой стороне. Уровень жидкости плотности ρ не выше шарнира. Радиусы понтонов R, длины L, массы m. Понтоны нагружены массой «М» по шарнирному соединению и удерживаются горизонтальными тросами. Определить угол между плоскостями понтонов α и силу натяжения тросов F, при которых уровень достигнет шарнира.

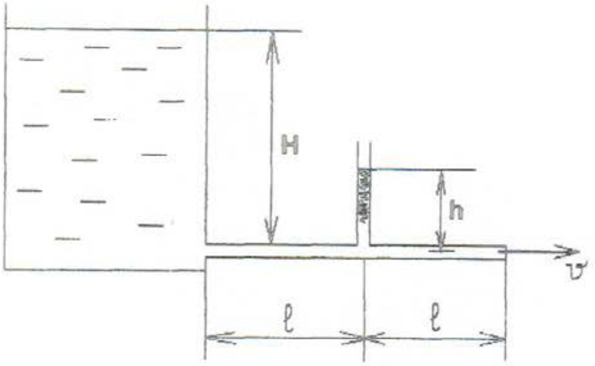


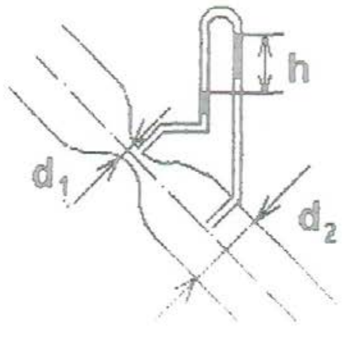


9. Цилиндрическая цистерна массы m, диаметра D, длины L плавает в жидкости ρ_1. Внутри неё налита жидкость плотности ρ_2. Плоскости поверхностей обеих жидкостей пересекают боковую поверхность цистерны. Определить минимальный объём жидкости внутри, при котором цистерна будет плавать вертикально.

10. Для задач 7, 9 написать условия, при которых плоскости поверхностей пересекаются только с боковой поверхностью цилиндрического резервуара.

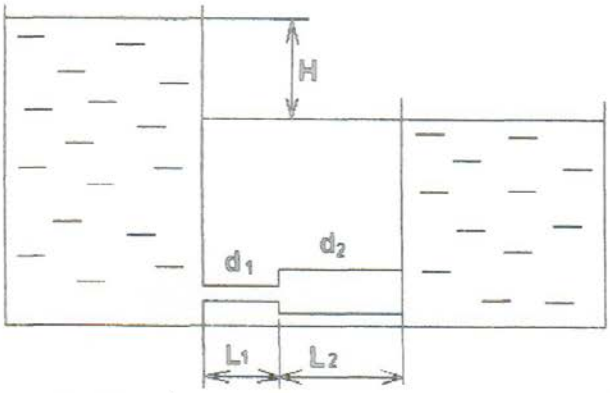
11. Жидкость из бака с уровнем H вытекает через горизонтальную трубу в атмосферу. По середине трубы установлена трубочка - пьезометр, который показывает уровень h (все уровни от осевой линии трубы считаются постоянными). Считая, что труба достаточно длинная и коэффициент сопротивления на входе в трубу равен 0.5, определить скорость течения в трубе.



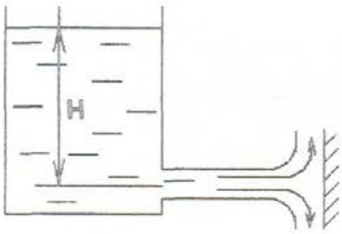


12. Между двумя сечениями трубопровода диаметров $d_1 < d_2$ плавно расширяющийся участок. От этих сечений (с осевой линии) отведены трубки к дифференциальному манометру. Зная разность уровней в этих трубках h, определить расход жидкости. Течение считать установившимся, потерями на вязкость пренебречь.

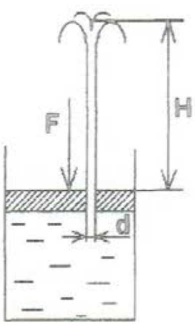
13. Из одного бака в другой ведет трубопровод, состоящий из труб длины L_1, диаметра d_1 и L_2, диаметра d_2. Разность уровней «H» считается постоянной. Коэффициент гидравлического трения λ одинаков для обеих труб и известен. Коэффициент сопротивления на входе $\varsigma = 0{,}5$, потери напора на внезапном расширении учесть по формуле Борда:



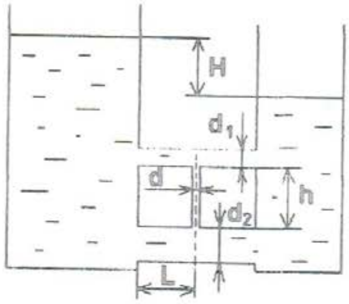
$$\Delta h = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$$ Определить расход Q.



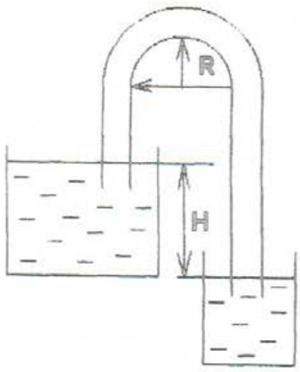
14. Из бака под напором «H» вырывается струя и бьёт в плоскую стенку, расположенную ортогонально к ней. Площадь сечения струи S. Определить силу давления на стенку F и величину максимального давления в точке торможения струи.



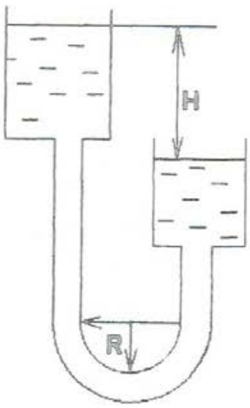
15. Цилиндрический сосуд закрыт поршнем площади S. На поршень давят силой F, в поршне имеется отверстие диаметром $d \ll \sqrt{S}$, из которого вертикально вверх вырывается струя жидкости. Пренебрегая скоростью движения поршня и потерями по длине в отверстии диаметра d, определить высоту фонтана «H». Коэффициент сопротивления входа в отверстие $\varsigma = 0{,}5$.



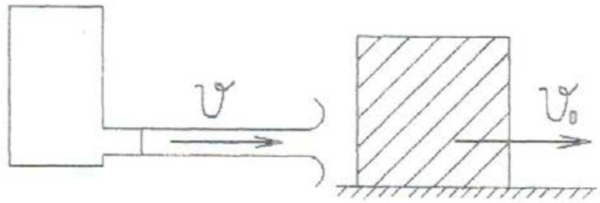
16. Из одного резервуара в другой ведут две трубы диаметров d_1 ,d_2 , соединённые тонким капилляром диаметра d, на расстоянии L от входа. Считая режим течения в капилляре ламинарным, написать условие движения жидкости в нём вверх, найти расход Q через капилляр.



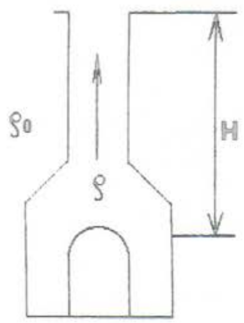
17. Сифонный трубопровод имеет два вертикальных участка и участок постоянного радиуса кривизны R. Диаметр трубы d, коэффициент гидравлического трения $\lambda = 0.025$, действующий напор H. Найти давление и сечение где оно будет минимально.



18. Условия задачи 18 аналогичны условию задачи 17 (только трубопровод не сифонный). Найти давление и сечение где давление максимально.



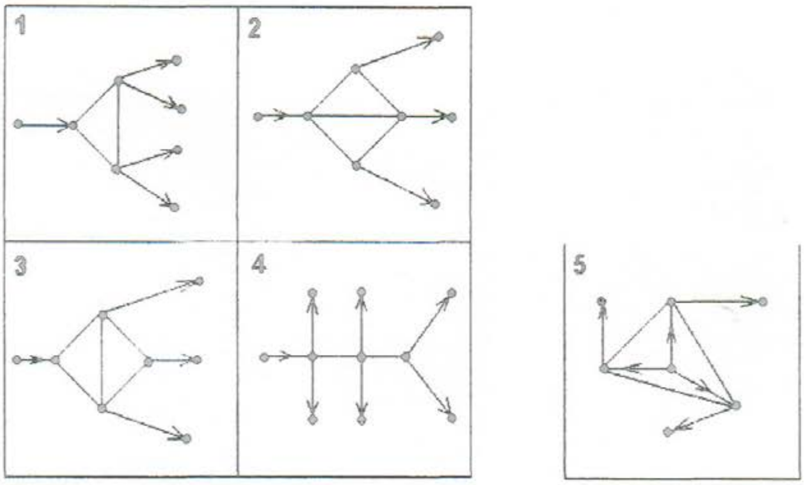
19. Струя жидкости, вылетающая из насадка со скоростью V, толкает предмет, соударяясь с его плоской стенкой, расположенной ортогонально струе. При какой скорости предмета V_0 мощность, сообщаемая ему струей, будет максимальной.



20. Определить скорость движения печного газа в вытяжном газопроводе высоты «Н». Диаметр трубы d (сечение круговое), коэффициент гидравлического трения $\lambda = 0.03$. Плотность печного газа $\rho < \rho_0$ - плотность воздуха снаружи. Коэффициент сопротивления входа в трубу $\varsigma = 0.3$. Размерами топки по сравнению с «Н» пренебречь.

В задачах 21 - 40 длины линейных сетевых участков подразумеваются достаточно большими, чтобы можно было пренебречь местными потерями. Длины и диаметры (или гидравлические радиусы) считаются заданными и не обязательно одинаковыми. Коэффициенты гидравлического трения для каждого из участков (коэффициенты Шези) считаются заданными. Для следующих схем соединения требуется составить полную систему уравнений расчёта сети.

Схема	Задачи
1 соотв.	21,22,31,32
2 соотв.	23,24,33,34
3 соотв.	25,26,35,36
4 соотв.	27,28,37,38
5 соотв.	29,30,39,40



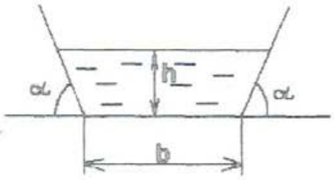
В задачах 21, 23, 25, 27, 29 для соответствующих схем заданы напоры на входе и на выходах из сети, требуется определить расходы и напоры в промежуточных узлах трубопроводной сети.

В задачах 22, 24, 26, 28, 30 для соответствующих схем заданы напор на входе и расходы на выходах, требуется определить расходы и напоры в промежуточных узлах трубопроводной сети.

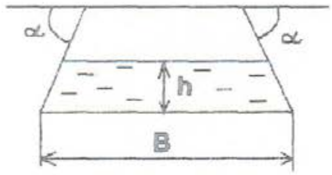
В задачах 31, 33, 35, 37, 39 для соответствующих схем заданы высотные отметки концевых узлов сети каналов (входов и выходов), требуется определить расходы и высотные отметки промежуточных узлов.

В задачах 32, 34, 36, 38, 40 для соответствующих схем задана глубина h_i входа, высотные отметки всех узлов сети и расходы на выходах. Требуется определить остальные расходы и глубины в промежуточных и концевых узлах сети.

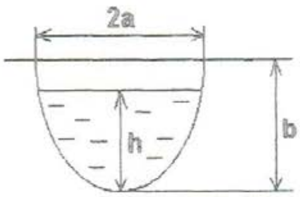
41. Трапецеидальное русло имеет ширину нижнего основания b и угол откосов α. При заданном расходе Q определить глубину h, при которой будет происходить переход спокойного течения в бурное.



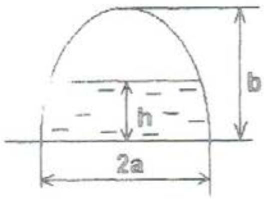
42. Условие этой задачи аналогично условию 41, только трапеция обращена большим основанием вниз. Требуется определить то же.



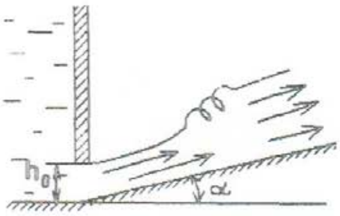
43. Русло параболического поперечного сечения задано параметрами a, b. При заданном расходе Q определить глубину, при которой будет происходить переход спокойного течения в бурное.



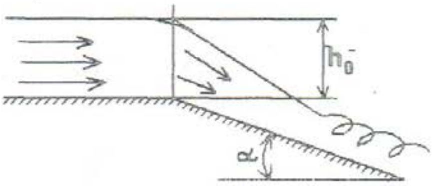
44. Условие этой задачи аналогично условию 43, только парабола обращена вершиной вверх. Определить то же.



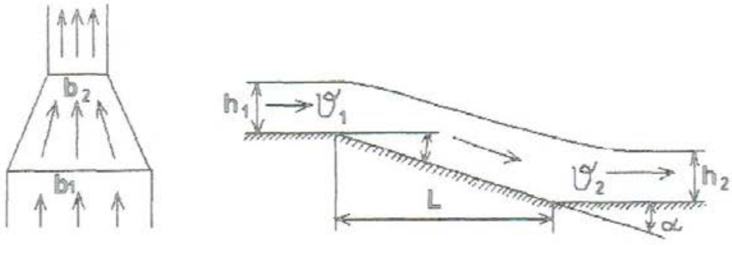
45. Бурный поток с расходом Q вырывается из под щита напорной дамбы и направляется в русло прямоугольного поперечного сечения с отрицательным уклоном $tg\alpha$. Используя одномерную модель установившегося течения (т.е. считая скорость в каждом сечении постоянной со временем и одинаковой по сечению), пренебрегая вязкостью, определить местонахождение гидравлического прыжка. Ширина русла b, высота щели h_0



46. Спокойный поток с расходом Q с горизонтального участка попадает в русло прямоугольного поперечного сечения с положительным уклоном $tg\alpha$. При использовании той же модели, что и в задаче 45, определить место перехода потока из спокойного в бурное состояние. Ширина русла b, начальная глубина h_0.



47. Спокойный поток направляется в сужающуюся часть русла. Участок сужения имеет уклон $tg\alpha$. Ширина меняется от b_1 до $b_2 < b_1$. Русло прямоугольного поперечного сечения. Расход Q и глубина в широкой части h_1. Найти глубину h_2, если длина сужения равна L по горизонтали.



48. Написать систему уравнений гидравлического прыжка для русла трапецеидального поперечного сечения (ширина нижнего основания и угол откосов заданы). См. задачу 41.
49. Написать систему уравнений гидравлического прыжка для русла параболического поперечного сечения (a, b – заданы). См. задачу 43.
50. Бурный поток (скорость V_1, глубина h_1) в русле прямоугольного поперечного сечения ширины b был внезапно частично прегражден (например, оползнем). У преграды возникло повышение уровня до глубины $h_2 > h_1$, а скорость потока упала до величины V_2. Считая V_1, h_1, h_2 заданными, необходимо определить скорость за гидравлическим прыжком и скорость самого гидравлического прыжка, движущегося навстречу бурному потоку.