

Министерство образования и науки РФ  
Филиал федерального государственного бюджетного образовательного  
учреждения высшего образования  
«Майкопский государственный технологический университет»  
в поселке Яблоновском  
Кафедра инженерных дисциплин и таможенного дела

С.Н. ЖУРАВЛЕВА

Методические указания по выполнению курсовой работы  
по дисциплине «Прикладная механика»  
для студентов всех форм обучения по специальности  
20.05.01 Пожарная безопасность

пгт Яблоновский  
2017

УДК 621: 531  
ББК 31.21я73  
Ж 35

Составитель: канд. техн. наук, доцент Журавлева С.Н.

Методические указания по выполнению курсовой работы по дисциплине «Прикладная механика» для студентов всех форм обучения по специальности 20.05.01 Пожарная безопасность: Журавлева С.Н.; Майкоп. гос. технол. ун-т. Кафедра инженерных дисциплин и таможенного дела. – Изд. Филиал Майкоп. гос. технол. ун-т в пос. Яблоновском, 2017. – 28 с.

Общее содержание методических указаний соответствует программе дисциплины, разработанной кафедрой транспортных процессов и техносферной безопасности и утвержденной научно - методическим советом филиала МГТУ в пос. Яблоновском. Цель настоящих методических указаний – оказать учебно - методическую помощь бакалаврам для повышения качества усвоения учебного материала и формирования устойчивых компетенций по дисциплине «Прикладная механика».

**Рецензенты:**

**Война А.А.** к.т.н., доцент кафедры наземного транспорта и механики КубГТУ

**Нижник А.Е.** д.т.н., проф., профессор кафедры инженерных дисциплин и таможенного дела филиала МГТУ в поселке Яблоновском

Печатается по решению научно-методической комиссии по специальности 20.05.01 Пожарная безопасность для студентов всех форм обучения Филиала ФГБОУ ВО «МГТУ» в поселке Яблоновском, протокол от 31.08.2017 №1

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1 Алгоритм выбора варианта и требования к оформлению курсовой работы.....	5
2 Пример решения задачи №1 «Кинематический и силовой расчет кривошипно-ползунного механизма».....	6
3 Пример решения задачи №2 «Расчет стержня на растяжение и сжатие».....	16
4. Пример решения задачи №3 « Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов при поперечном изгибе».....	21
Список литературы.....	28

## ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Прикладная механика» – базовая дисциплина, которая состоит из трёх частей: теории механизмов и машин и сопротивления материалов.

Теория механизмов и машин изучает наиболее общие вопросы исследования и проектирования механизмов и машин. Сопротивление материалов рассматривает вопросы расчёта элементов конструкций на прочность, жёсткость и устойчивость, которые позволяют определить безопасные размеры конструктивных элементов или допускаемую эксплуатационную нагрузку.

Изучение каждой последующей части дисциплины «Прикладная механика» опирается на теоретические и практические методы, изученные в предыдущих частях. Материалы каждой части дисциплины тесно связаны между собой и представляют единую общетехническую науку, изучающую принципы действия, расчёта и проектирования машин, механизмов и отдельных деталей.

Разработанные методические указания значительно облегчат студентам самостоятельное выполнение расчетов по изучаемому курсу. Методические указания имеют целью научить студента основам технических знаний, используемых при изучении последующих технических дисциплин. Полученные навыки студент сможет применить в решении задач и выполнении курсовой работы по дисциплине.

## **1 Алгоритм выбора варианта и требования к оформлению курсовой работы**

По программе предусмотрено выполнение студентами 3-х задач курсовой работы. Первая задача №1 по разделу «Теория машин и механизмов». Вторая и третья задачи по разделу «Сопrotивление материалов».

При выполнении курсовой работы по этой дисциплине задачи решают на отдельных сброшюрованных листах с полями.

Перед решением задачи надо выписать полностью её условие с числовыми данными, составить эскиз (рисунок) в масштабе и указать на нём в числах все величины, необходимые для расчёта.

Решение сопровождать краткими, последовательными и грамотными (без сокращения слов) объяснениями и чертежами, на которых для всех входящих в расчёт величин даны числовые значения. Указывать единицы измерения всех величин.

Контрольная работа выполняется на листах формата А4. Текст может быть выполнен рукописно или с помощью средств компьютерной техники. Следует соблюдать следующие размеры полей: правое – 15 мм; левое – 30 мм; верхнее – 15 мм; нижнее – 25 мм.

Листы контрольной работы нумеруют арабскими цифрами. Номер листа проставляют на нижнем поле листа справа. На титульном листе номер листа не проставляют.

Список литературы, упомянутой в тексте курсовой работы, составляется в порядке их упоминания.

## 2 Пример решения задачи №1 «Кинематический и силовой расчет кривошипно-ползунного механизма»

Задана схема кривошипно-ползунного механизма (рис. 1), состоящего из следующих звеньев: 1 – стойка (неподвижное звено); 2 – кривошип, совершающий вращательное движение относительно опоры  $O$ ; 3 – шатун,двигающийся плоскопараллельно; 4 – ползун,двигающийся возвратно-поступательно вдоль направляющей  $\beta-\beta$ .

Необходимо определить скорости и ускорения звеньев и точек механизма, а также величины реакций в кинематических парах механизма при следующих исходных данных:

- частота вращения кривошипа  $n = 100 \text{ об/мин}$ ,
- положение кривошипа в заданный момент времени  $\varphi = 45^\circ$ ;
- длина кривошипа  $OA = R = 90 \text{ мм}$ ;
- длина шатуна  $AB = L = 280 \text{ мм}$ ;
- расстояние от центра вращения кривошипа до траектории движения ползуна  $\varepsilon = 20 \text{ мм}$ ;
- направление вращения кривошипа – по часовой стрелке;
- сила полезного сопротивления  $Q_{\text{ПС}} = 3,2 \text{ кН}$ ;
- вес ползуна  $G = 180 \text{ Н}$ .

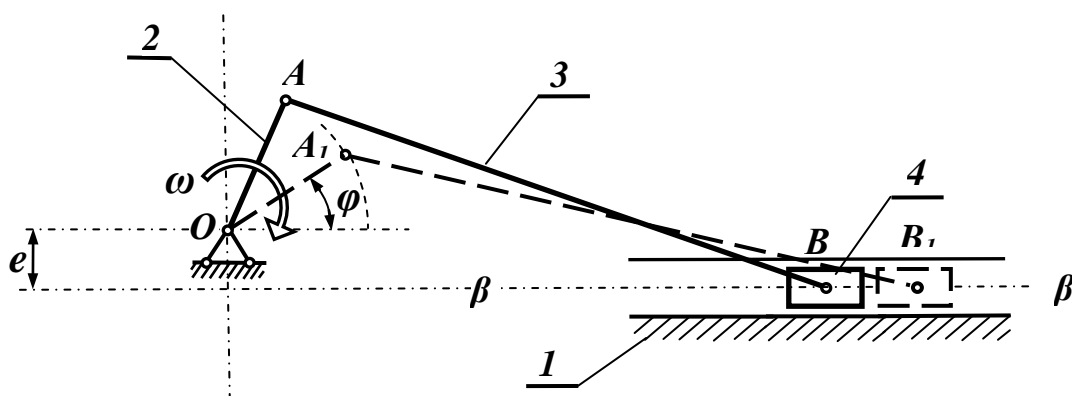


Рисунок 1

### Решение

#### Кинематическое исследование механизма

Наиболее простым и распространенным способом исследования механизмов является графоаналитический метод. Следует отметить, что точность решения задачи графоаналитическим методом зависит не только от точности арифметических вычислений, но и от точности геометрических построений. Поэтому надо обратить внимание на строгое соблюдение масштабов и точное взаимное расположение векторов и звеньев механизма.

Решение начинаем с построения схемы механизма по заданным геометрическим параметрам. Для этого требуется построить план механизма для положение ведущего звена  $OA$ , т. е. найти положение всех звеньев в заданный момент времени. Построение ведем в следующей последовательности:

- 1) принимаем масштаб изображение звеньев механизма  $\mu_L$ ;
- 2) чертим положение кривошипа в заданный момент времени (рис. 2, а);
- 3) проводим известные траектории движения точек механизма в принятом масштабе;
  - точка  $A$  движется по окружности с центром в точке  $O$ ;
  - точка  $B$  движется по прямой  $\beta-\beta$  вдоль направляющей стойки;
- 4) из точки  $A$  раствором циркуля, равным длине шатуна  $AB$ , делаем засечку на траектории движения точки  $B$ , т. е. на прямой  $\beta-\beta$ , где и показываем искомое положение ползуна 4.

Далее для данного положения механизма определяем скорости движения узловых точек механизма. Точка  $O$  расположена на неподвижной стойке, её скорость равна нулю. Точка  $A$  принадлежит кривошипу, совершающему вращающее движение. Следовательно, скорость точки  $A$  будет равна

$$V_A = \omega \cdot R.$$

Здесь 
$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{3,14 \cdot 100}{30} = 10,47 \text{ 1/с}.$$

Тогда 
$$V_A = \omega \cdot R = 10,47 \cdot 0,09 = 0,94 \text{ м/с}.$$

Вектор этой скорости перпендикулярен радиусу  $OA$  и направлен в сторону вращения кривошипа (рис 2, а). Таким образом, скорость точки  $A$  известна и по величине, и по направлению.

Определяем скорость точки  $B$ . Эта точка принадлежит одновременно шатуну 3 и ползуну 4. Поскольку ползун движется вдоль направляющей  $\beta-\beta$ , то направление скорости этой точки известно: вектор  $V_B$  направлен вдоль линии  $\beta-\beta$ . Шатун движется плоскопараллельно. Скорость произвольной точки тела при плоскопараллельном движении можно определить, как геометрическую сумму вектора скорости полюса и вектора скорости рассматриваемой точки по отношению к полюсу.

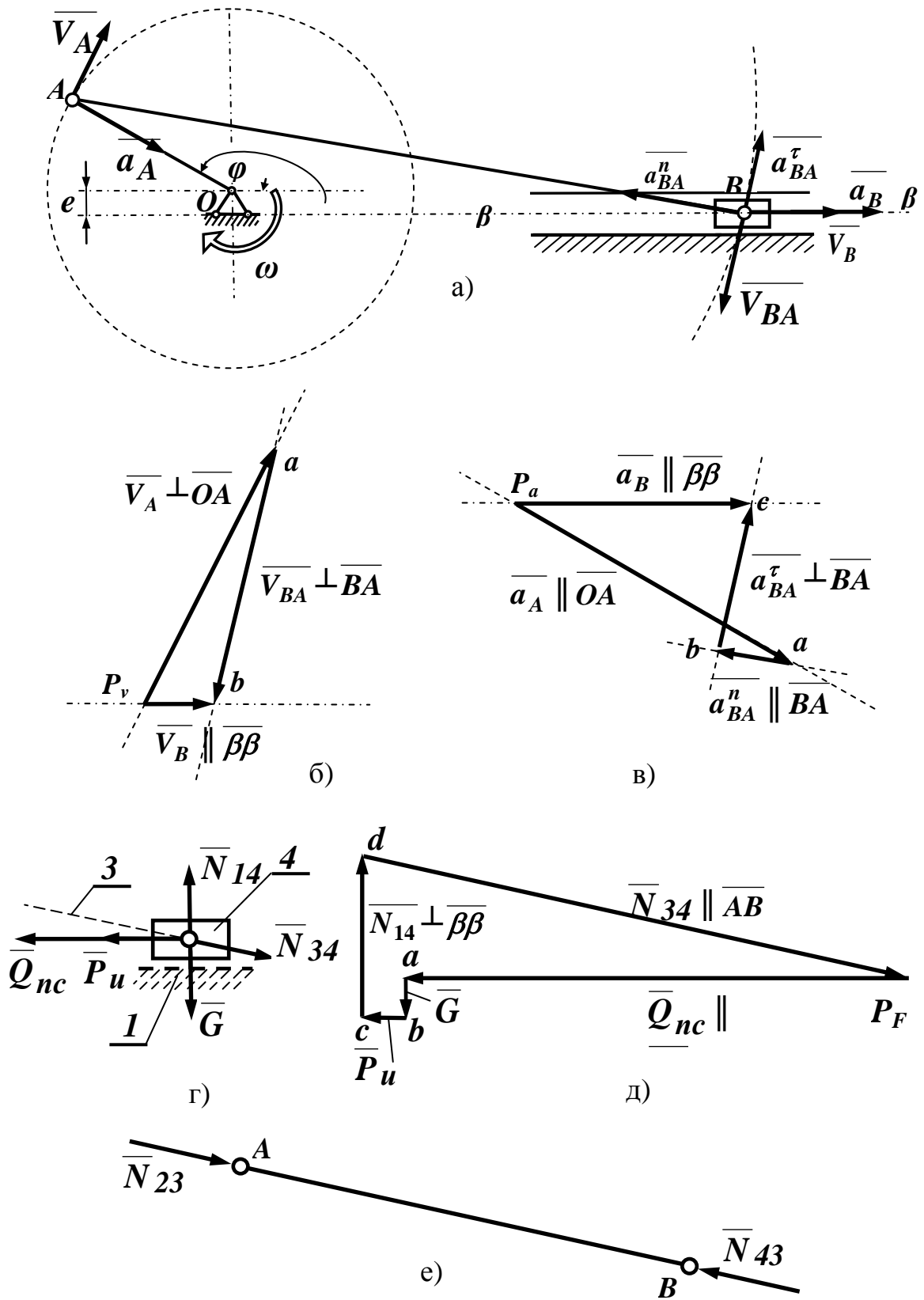


Рисунок 2



За полюс принимаем точку, скорость которой известна, т. е. точку  $A$ . Движение точки  $B$  по отношению к точке  $A$  происходит по дуге окружности с центром в точке  $A$ . Следовательно, вектор скорости точки  $B$  при её движении по отношению к точке  $A$  направлен по касательной к траектории движения т. е. перпендикулярно линии  $AB$ . Таким образом, скорость точки  $B$  по отношению к точке  $A$  известна по направлению. Векторное уравнение, связывающее скорости точек шатуна, совершающего плоскопараллельное движение, выглядит так

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}. \quad (1)$$

Здесь  $\overline{V}_B$  – вектор скорости точки  $B$ ;

$\overline{V}_A$  – вектор скорости точки  $A$ ;

$\overline{V}_{BA}$  – вектор скорости точки  $B$  при её движении относительно точки  $A$ .

В соответствии с уравнением (1) можно построить векторный треугольник, представляющий собой план скоростей (рис. 2, б). Построение плана скоростей начинаем из полюса  $P_V$ , откладывая отрезок  $P_Va$ , изображающий вектор  $\overline{V}_A$ , направленный перпендикулярно кривошпицу в сторону его вращения. Длину этого отрезка выбираем произвольно, чтобы чертеж получился достаточно крупным и наглядным.

Примем  $P_Va = 50$  мм. Длина этого отрезка  $P_Va$  определяет масштаб плана скоростей  $\mu_v$

$$\mu_v = \frac{V_A}{P_{VA}} = \frac{0,94}{50} = 0,0188 \frac{м/с}{мм}.$$

Поскольку вектор  $\overline{V}_{BA}$  складывается с вектором  $\overline{V}_A$ , то по правилу векторного суммирования его начало располагаем в конце вектора  $\overline{V}_A$  и направляем его линию действия перпендикулярно отрезку  $AB$ . Вектор  $\overline{V}_B$  является суммой двух векторов. Следовательно, его начало должно располагаться в начале первого вектора, конец – в конце последнего, и он должен быть направлен параллельно линии  $\beta-\beta$ . Проведенные линии пересекаются в точке  $b$ , определяя длины векторов  $\overline{V}_B$  и  $\overline{V}_{BA}$ . Измеряем на плане длины отрезков  $P_Vb$  и  $ab$  (рис 2, б).

$$P_{Vb} = 15 \text{ мм}, \quad ab = 44 \text{ мм}.$$

Зная масштаб плана скоростей  $\mu_v$ , определяем величины скоростей этих точек

$$V_{BA} = \mu_v \cdot ab = 0,0188 \cdot 44 = 0,83 \text{ м/с};$$

$$V_B = \mu_v \cdot (P_v b) = 0,0188 \cdot 15 = 0,28 \text{ м/с}.$$

Таким образом, мы нашли скорости всех узловых точек нашего механизма.

Далее определим ускорения точек механизма. Вычисляем полное ускорение точки  $A$ , принадлежащей кривошипу, совершающему вращательное движение по формуле

$$\overline{a_A} = \overline{a_A^n} + \overline{a_A^\tau},$$

где  $a_A^n$  – нормальное ускорение точки  $A$ ;  $a_A^n = \omega^2 \cdot R$ ;

$a_A^\tau$  – касательное ускорение точки  $A$ ;  $a_A^\tau = \varepsilon \cdot R$ .

Поскольку движение кривошипа происходит с постоянной угловой скоростью  $\omega = const$ , то его угловое ускорение  $\varepsilon = 0$  и  $a_A^\tau = 0$ . Тогда

$$a_A = a_A^n = \omega^2 \cdot R = 10,47^2 \cdot 0,09 = 9,87 \text{ м/с}.$$

Вектор нормального ускорения точки  $A$  направлен к центру кривизны траектории движения этой точки, т. е. к точке  $O$ . Следовательно, этот вектор расположен вдоль линии  $AO$ .

Учитывая плоскопараллельное движение шатуна, определяем ускорение точки  $B$ , принимая за полюс точку  $A$ , где ускорение уже найдено

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}^n} + \overline{a_{BA}^\tau}, \quad (2)$$

где  $\overline{a_A}$  – ускорение точки  $A$ , которое уже определено и по величине, и по направлению;

$\overline{a_{BA}}$  – ускорение точки  $B$  относительно точки  $A$ , которое раскладывается на два вектора;

$a_{BA}^n$  – нормальное ускорение точки  $B$  в её движении относительно точки  $A$  по дуге окружности с центром в точке  $A$ ; этот вектор направлен всегда к центру кривизны траектории движения точки, т. е. вдоль отрезка  $BA$  к точке  $A$ ;

$a_{BA}^\tau$  – касательное ускорение точки  $B$  в её движении относительно точки  $A$  по дуге окружности с центром в точке  $A$ : этот вектор направлен всегда по касательной к траектории движения, т. е. перпендикулярно прямой  $BA$ .

Нормальные ускорения точек вращающегося тела определяются следующим образом:

$$a_{BA}^n = \frac{V_{BA}^2}{L} = \frac{0,83^2}{0,28} = 2,46 \text{ м/с}^2.$$

Таким образом, вектор  $\overline{a_{BA}^n}$  известен и по величине, и по направлению. Векторы  $\overline{a_B}$  и  $\overline{a_{BA}^\tau}$  известны только по направлению. Чтобы определить величины этих векторов, строим план ускорений.

Выбираем положение полюса плана ускорений  $P_a$  (рис. 2, в). Из этого полюса откладываем отрезок  $P_a a$  параллельно линии  $AO$ , изображающий вектор ускорения точки  $A$ . Длину этого отрезка выбираем произвольно, чтобы план получился достаточно крупный и наглядный. Примем  $P_a a = 50$  мм. Размер этого отрезка определяет масштаб плана ускорений, который рассчитывается по зависимости

$$\mu_a = \frac{a_A}{P_a a} = \frac{9,87}{50} = 0,197 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}.$$

Далее в соответствии с уравнением (2) строим вектор  $\overline{a_{BA}^n}$ . Длину отрезка  $av$ , выражающего этот вектор, определим с помощью принятого масштаба

$$av = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a} = \frac{2,46}{0,197} = 12,5 \text{ мм}.$$

Поскольку вектор  $\overline{a_{BA}^n}$  суммируется с вектором  $\overline{a_A}$ , то его начало совпадает с концом предыдущего вектора, а направлен он параллельно линии  $VA$  в сторону точки  $A$ . Из конца этого вектора проводим линию действия вектора  $\overline{a_{BA}^\tau}$  перпендикулярно прямой  $AB$ . Вектор  $\overline{a_B}$  по уравнению (2) равен сумме трех векторов, а значит его начало выходит из полюса  $P_a$ , и он направлен параллельно линии  $\beta-\beta$ . Линии действия векторов  $\overline{a_{BA}^\tau}$  и  $\overline{a_B}$  пересекаются в точке  $c$ , определяя величины этих векторов. Измеряем длины отрезков  $bc$  и  $P_a c$

$$bc = 23 \text{ мм}, \quad P_a c = 35 \text{ мм}.$$

Определяем ускорения векторов  $\overline{a_{BC}^\tau}$  и  $\overline{a_B}$

$$a_{BC}^\tau = \mu_a \cdot bc = 0,197 \cdot 23 = 4,53 \text{ м/с}^2,$$

$$a_B = \mu_a \cdot P_a c = 0,197 \cdot 35 = 6,90 \text{ м/с}^2.$$

Таким образом, мы определили ускорения всех узловых точек данного механизма.

## Силовой расчет механизма

Силовой расчет механизма ведется в порядке, обратном кинематическому исследованию, т. е. сначала ведется расчет последней присоединенной группы Ассура, затем предыдущей и т. д. и, наконец, ведется расчет ведущего звена. В основу силового расчета положен принцип Даламбера, который заключается в том, что звено предполагается условно находящимся в состоянии равновесия под действием всех внешних сил, включая силы инерции. Этот принцип позволяет применить к движущейся системе уравнения статического равновесия.

В расчетах будем учитывать только массу ползуна, массой остальных подвижных звеньев будем пренебрегать для простоты решения задачи, исключая инерционные нагрузки, возникающие при их движении.

Мысленно отсоединим ползун 4 от механизма (рис. 1) и заменим действие остальных присоединенных к нему звеньев их реакциями (рис. 2, г). Здесь вектором  $Q_{nc}$  обозначена сила полезного сопротивления, которая всегда направлена против движения ползуна, т. е. против вектора скорости  $\overline{V}_B$  (рис. 2, г). Величина этой силы известна по условию задачи. Вектором  $\overline{P}_u$  обозначена сила инерции ползуна, которая направлена против вектора ускорения ползуна  $\overline{a}_B$  (рис. 2, г). Величину силы инерции определяем по второму закону Ньютона

$$P_u = m \cdot a_B = \frac{G}{g} a_B = \frac{180}{9,8} \cdot 6,9 = 126,7 \text{ Н.}$$

Здесь  $g$  – ускорение свободного падения.

Вектор собственного веса ползуна  $\overline{G}$  направлен вертикально вниз. Реакция стойки 1 на ползун 4 обозначена вектором  $\overline{N}_{14}$ , где первый индекс показывает, какое звено оказывает действие, а второй – на какое звено действует реакция. Линия действия этого вектора направлена перпендикулярно поверхности контакта этих звеньев, т. е. вертикально. Величина вектора неизвестна. Действие шатуна на ползун обозначено вектором  $\overline{N}_{34}$ . Вектор этой реакции направлен вдоль оси шатуна. Величина этой реакции неизвестна.

Для определения неизвестных сил  $N_{14}$  и  $N_{34}$  воспользуемся принципом Даламбера, согласно которого сумма всех приложенных к ползуну сил, включая силу инерции, равна нулю. В векторном виде это условие равновесия выражается уравнением

$$\overline{Q}_{nc} + \overline{G} + \overline{P}_u + \overline{N}_{14} + \overline{N}_{34} = 0.$$

В этом векторном уравнении первые три вектора известны и по величине, и по направлению, а два последние – только по направлению. Построим план сил (рис. 2, д). Построение плана начинаем из полюса  $P_F$ , откладывая отрезок  $P_Fa$ , изображающий вектор силы полезного сопротивления  $\overline{Q}_{nc}$  и направленный вдоль направляющей  $\beta-\beta$  навстречу вектору скорости  $\overline{V}_B$ . Длину этого отрезка выбираем произвольно, так чтобы чертеж получился достаточно крупным и наглядным. Пусть  $P_Fa = 100 \text{ мм}$ . Длина отрезка  $P_Fa$  определяет масштаб плана сил  $\mu_F$ .

$$\mu_F = \frac{Q_{nc}}{P_Fa} = \frac{3200}{100} = 32 \frac{\text{Н}}{\text{мм}}.$$

По выбранному масштабу находим длину отрезка  $ab$ , выражающего силу веса ползуна  $\overline{G}$ .

$$ab = \frac{G}{\mu_F} = \frac{180}{32} = 5,6 \text{ мм}.$$

Поскольку этот вектор складывается с первым вектором, то по правилу векторного суммирования его начало совпадает с концом первого вектора, и он направлен вертикально вниз. Аналогично определяем отрезок  $bc$ , выражающий длину вектора силы инерции ползуна  $\overline{P}_u$

$$bc = \frac{P_u}{\mu_F} = \frac{126,7}{32} = 4,0 \text{ мм}.$$

Этот отрезок начинается в конце второго вектора  $\overline{G}$  и направлен вдоль направляющей  $\beta-\beta$  против силы инерции. Из конца этого вектора проводим линию действия реакции  $\overline{N}_{14}$  стойки на ползун, направленную перпендикулярно направляющей  $\beta-\beta$ . Поскольку сумма всех сил должна быть равна нулю, то последний вектор  $\overline{N}_{34}$  должен замыкать векторный многоугольник, т. е. его конец должен попасть в полюс плана. Поэтому из этого полюса проводим линию действия последнего вектора в направлении, параллельном положению шатуна  $BA$ . Эта линия пересекается с линией действия реакции  $\overline{N}_{14}$  в точке  $d$ , определяя длины отрезков  $cd$  и  $dP_F$ , выражающих размер искомых реакций. Теперь величины этих реакций находим измерением длин этих отрезков

$$cd = 30 \text{ мм}. \quad dP_F = 108 \text{ мм}.$$

С учетом принятого масштаба определяем значения сил  $\overline{N}_{14}$  и  $\overline{N}_{34}$

$$N_{14} = \mu_F \cdot cd = 32 \cdot 30 = 960 \text{ Н},$$

$$N_{34} = \mu_F \cdot dP_F = 32 \cdot 108 = 3456 \text{ Н}.$$

Таким образом, все силы, действующие на ползун, найдены. Для определения сил, действующих в кинематической паре  $A$  (рис. 2, а), соединяющей кривошип и шатун, рассмотрим силы, приложенные к шатуну. Для этого мысленно отсоединим его от механизма, а действие на шатун присоединенных звеньев заменим их реакциями (рис. 2, е). Реакция действия ползуна на шатун, очевидно, равна реакции действия шатуна на ползун, но направлена в противоположную сторону в соответствии с третьим законом Ньютона, т. е.  $\overline{N_{43}} = -\overline{N_{34}}$ . Силы, действующие на шатун направлены вдоль оси шатуна, т. к. шатун соединен с кривошипом и ползуном вращательными кинематическими парами. Поскольку этих сил всего две, то из условия равновесия они должны быть равны по величине, т. е.  $N_{23} = N_{43} = 3456 \text{ Н}$  и противоположны по направлению. Подобным образом можно определить силы, действующие на кривошип.

Схема к задаче 1

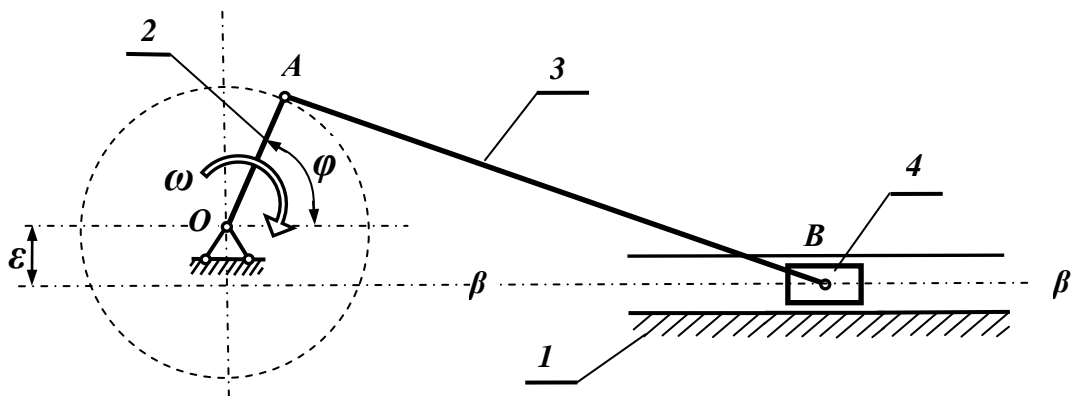
































Рисунок 3

Для заданного положение ведущего звена кривошипно-ползунного механизма (рис. 3, табл. 1.1) определить скорости и ускорения звеньев и точек механизма, а также величины реакций в его кинематических парах. Данные для расчета взять в таблице 1.1 по номеру, заданному преподавателем.

Т а б л и ц а 1.1 – Исходные данные к задаче 1

№ варианта	Частота вращения кривошипа	Положение кривошипа $\varphi$ (град)	Длина кривошипа $OA = R$ (мм)	Длина шатуна $AB = L$ (мм)	$\varepsilon$ (мм)	Направление вращения кривошипа	Сила полезного сопротивления $Q_{nc}$ (кН)	Вес ползуна $G$ (Н)
1	50	30	100	300	0		3,0	30
2	55	210	95	305	15		3,1	40
3	60	40	90	280	0		3,2	45
4	65	240	85	250	15		3,3	42
5	70	60	75	210	8		3,4	35
6	75	210	70	190	0		3,5	30
7	80	150	65	170	8		3,6	35
8	85	240	100	250	0		3,7	40
9	90	140	110	290	0		3,8	45
10	95	300	120	325	32		3,9	50
11	110	30	125	350	0		2,5	100
12	120	300	130	380	19		2,6	95
13	130	60	135	405	0		2,4	110
14	140	330	100	310	31		2,3	120
15	150	45	95	240	0		2,2	130
16	160	210	90	235	0		3,0	120
17	170	60	85	270	27		3,1	130
18	180	240	90	300	0		3,2	110
19	190	50	95	325	16		3,3	105
20	200	300	100	350	0		3,4	102
21	205	120	95	340	0		3,5	100
22	210	330	90	330	17		3,6	110
23	215	45	85	325	0		3,7	120
24	220	210	80	200	20		3,8	130
25	225	50	75	195	12		3,9	140
26	230	240	70	190	0		4,0	145
27	235	45	65	180	9		4,1	150
28	240	300	60	175	0		4,2	155
29	245	120	100	320	32		4,3	160
30	250	330	105	350	0		4,4	165

### 3 Пример решения задачи №2 «Расчет стержня на растяжение и сжатие»

Для стержня, изображенного на рис. 1, а, требуется определить внутренние продольные силы, нормальные напряжения в сечениях стержня и перемещения сечений стержня, изобразив эти зависимости графически в виде эпюр. Проверить прочность и жесткость стержня.

Для решения задачи принять:

– сила  $F = 8 \text{ кН}$ ;

- площадь поперечного сечения  $A = 125 \text{ мм}^2$ ;
- длины участков стержня:  $a = 0,75 \text{ м}$ ,  $b = 0,5 \text{ м}$ ,  $c = 1 \text{ м}$ ;
- материал стержня – сталь с модулем упругости  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ;
- допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .
- допустимое перемещение свободного конца стержня  $[\delta] = 1,5 \text{ мм}$ .

## Решение

Разбиваем стержень на участки. Границей участка являются любые характерные сечения, например, сечения, где приложены внешние силы или изменяется размер поперечного сечения. Пользуясь методом сечений, рассекаем каждый участок и определяем внутренние продольные силы (рис. 1, б, в, г). При этом пользуемся следующим правилом знаков. Сила считается положительной, если она растягивает стержень и отрицательная, если она сжимает стержень в месте рассечения. Тогда мы получаем следующие значения внутренних продольных сил на каждом участке:

$$\begin{aligned} N_1 &= 2F = 16 \text{ кН}; \\ N_2 &= 2F - F = 8 \text{ кН}; \\ N_3 &= 2F - F + 3F = 32 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Строим эпюру продольных сил (рис.1, д). Для этого проводим ось эпюры параллельно оси стержня. От каждой границы участка проводим линии до пересечения с осью эпюры. Найденные значения внутренних продольных сил на каждом участке откладываем перпендикулярно оси эпюры. При этом положительные значения откладываем сторону положительного направления координатной оси, отрицательные – в обратную сторону. Расставляем числовые значения внутренних сил на каждом участке, обозначаем название эпюры соответствующим символом и указываем размерность физических величин, изображенных на эпюре.

Затем вычисляем нормальные напряжения на каждом участке, помня о том, что необходимо соблюдать размерности чисел, входящих в расчетные формулы, в исходных единицах системы СИ. Знак нормальных напряжений определяется по тому же правилу, что и знак продольной силы: если напряжение растягивающее, оно считается положительное, если сжимающее – оно отрицательное.



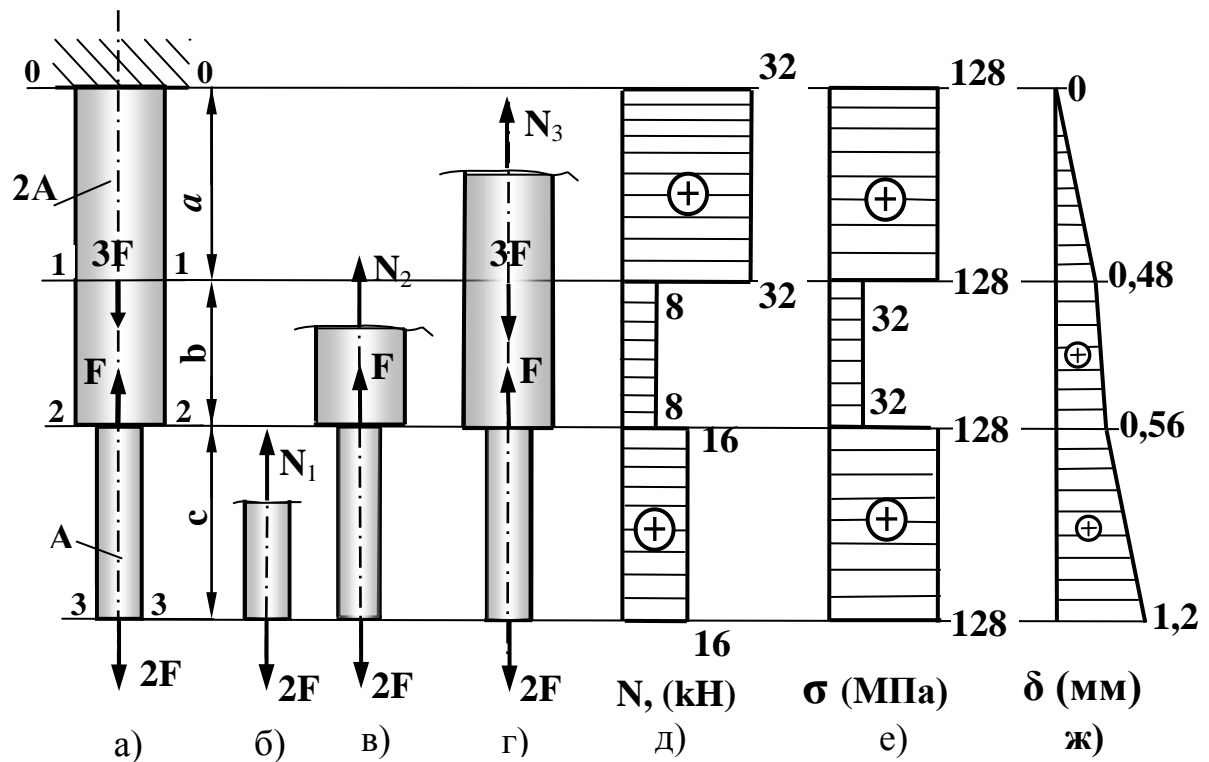


Рисунок 1 – Эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений сечений стержня

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{16 \cdot 10^3}{125 \cdot 10^{-6}} = 0,128 \cdot 10^9 = 128 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{2A} = \frac{8 \cdot 10^3}{250 \cdot 10^{-6}} = 0,032 \cdot 10^9 = 32 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{2A} = \frac{32 \cdot 10^3}{250 \cdot 10^{-6}} = 0,128 \cdot 10^9 = 128 \text{ МПа}.$$

Строим эпюру нормальных напряжений (рис. 1, е). Максимальное напряжение в стержне не превышает допусковой величины

$$\sigma_{max} = 128 \text{ МПа} < [\sigma],$$

следовательно, условие прочности выполняется.

Определим перемещения характерных сечений стержня. Расчет начинаем от сечения, где перемещение известно по условию задачи, а именно – в опоре. Это сечение 0-0 остается неподвижным, поскольку оно закреплено

$$\delta_{0-0} = 0.$$

Перемещение сечение  $1-1$  на границе верхнего и среднего участка будет зависеть от того, насколько растянется верхний участок, т. е.

$$\delta_{1-1} = \Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot a}{E \cdot A_3} = \frac{32 \cdot 10^3 \cdot 0,75}{2 \cdot 10^{11} \cdot 250 \cdot 10^{-6}} = 48 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,48 \text{ мм}.$$

Перемещение сечения  $2-2$  на границе среднего и нижнего участка зависит от перемещения сечения  $1-1$  и деформации среднего участка, т. е.

$$\begin{aligned} \delta_{2-2} &= \delta_{1-1} + \frac{N_2 \cdot b}{E \cdot A_2} = 48 \cdot 10^{-5} + \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 250 \cdot 10^{-6}} = \\ &= 48 \cdot 10^{-5} + 8 \cdot 10^{-5} = 56 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,56 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Перемещение нижнего конца стержня  $3-3$  зависит от перемещения сечения  $2-2$  и деформации нижнего участка

$$\begin{aligned} \delta_{3-3} &= \delta_{2-2} + \frac{N_1 \cdot c}{E \cdot A_1} = 56 \cdot 10^{-5} + \frac{16 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 125 \cdot 10^{-6}} = \\ &= 56 \cdot 10^{-5} + 64 \cdot 10^{-5} = 120 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 1,2 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Строим эпюру перемещений (рис. 1, ж). Максимальное перемещение сечений стержня не превышает допускаемой величины

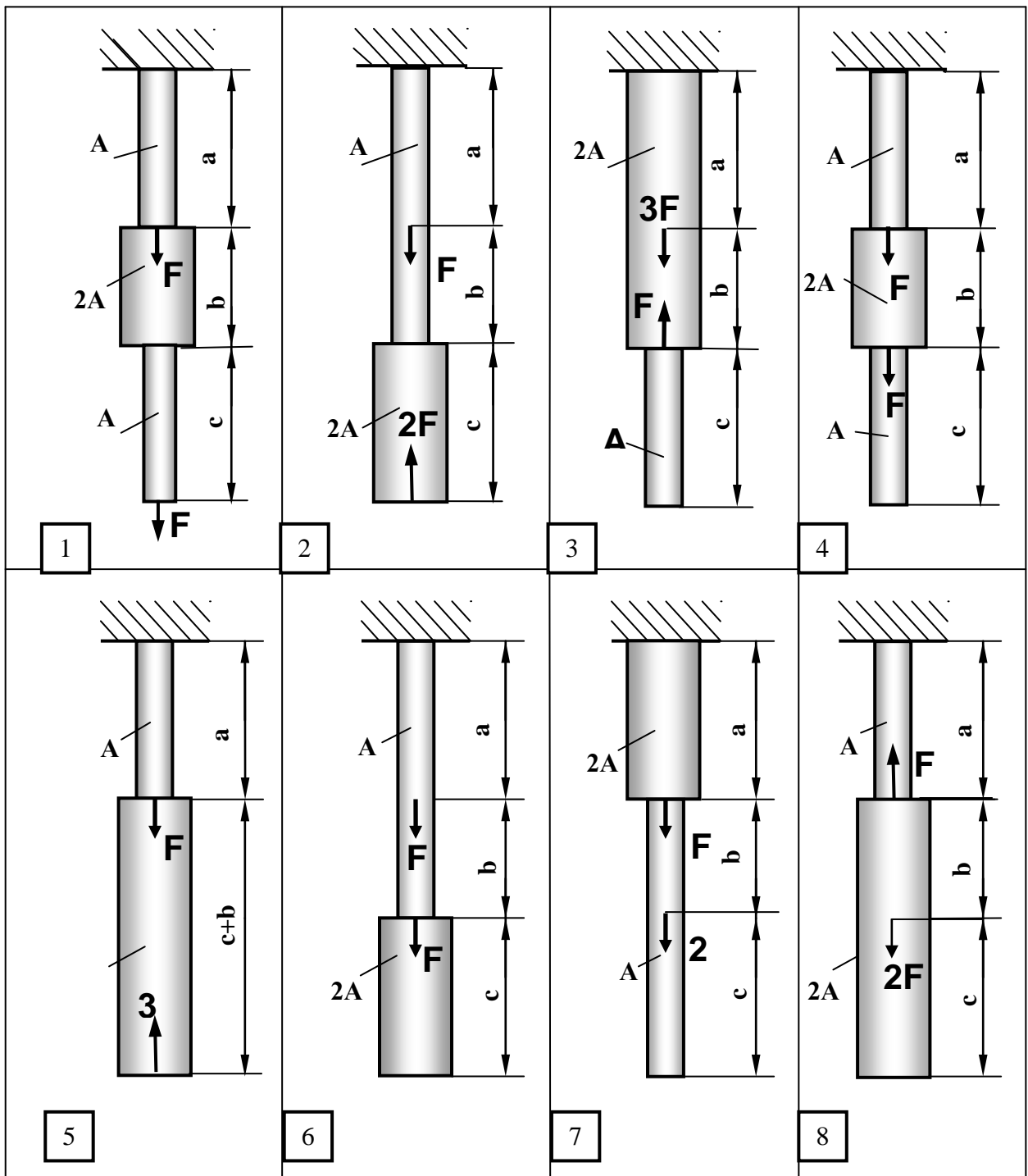
$$\Delta_{max} = 1,2 \text{ мм} < [\delta],$$

следовательно, условие жесткости выполняется.

Для выполнения задачи №2 значения параметров выбираются из таблицы 2.1 по номеру группы, а расчетная схема бруса выбирается по рисунку из таблицы 2.2 согласно номеру студента в списке группы.

Для выполнения задачи №1 расчетная схема бруса выбирается по рисунку из таблицы 1.1 согласно последней цифре шифра зачетной книжки студента, а значения параметров выбираются из таблицы 1.2 по предпоследней цифре шифра.

Таблица 1.1 – Варианты заданий для расчета на растяжение и сжатие



Продолжение таблицы 1.1

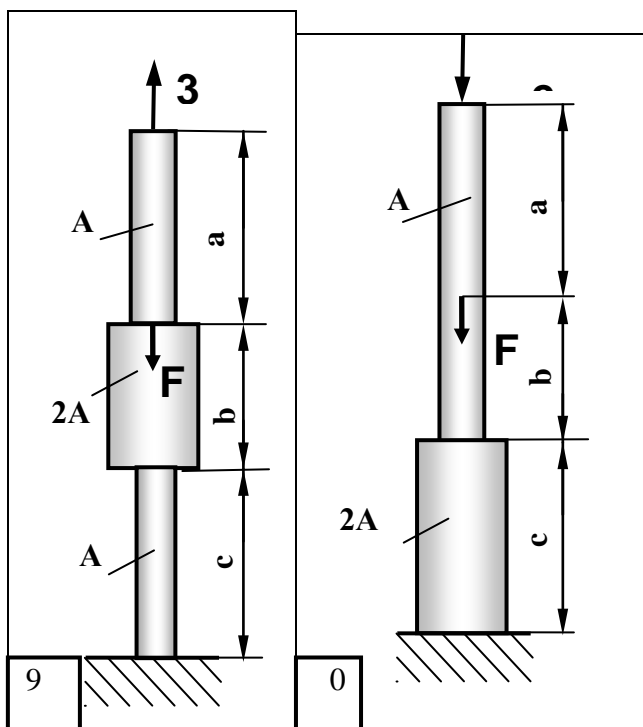


Таблица 1.2– Исходные данные для расчета на растяжение-сжатие

№ варианта	F (кН)	a (м)	b (м)	c (м)	$[\sigma]$ (МПа)	E (Па)	A (мм <sup>2</sup> )	$\delta$ (мм)
0	5	0,4	0,5	0,7	160	$2 \cdot 10^{11}$	125	1,5
1	6	0,5	0,3	0,4	160	$2 \cdot 10^{11}$	125	1,5
2	8	0,6	0,4	0,5	160	$2 \cdot 10^{11}$	125	1,5
3	3	0,4	0,6	0,8	160	$2 \cdot 10^{11}$	125	1,5
4	4	0,8	0,4	0,6	160	$2 \cdot 10^{11}$	125	1,5
5	5	0,7	0,3	1,0	160	$2 \cdot 10^{11}$	125	1,5
6	6	0,5	0,4	0,5	160	$2 \cdot 10^{11}$	125	1,5
7	7	0,6	0,6	0,8	160	$2 \cdot 10^{11}$	125	1,5
8	8	0,4	0,4	0,6	160	$2 \cdot 10^{11}$	125	1,5
9	4	0,8	0,7	0,5	160	$2 \cdot 10^{11}$	125	1,5

#### 4. Пример решения задачи №3 « Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов при поперечном изгибе»

##### Пример выполнения

Для балки, изображенной на рисунке 1, выполнить проектный расчет, подобрав четыре вида поперечного сечения: круглое, квадратное, прямоугольное с отношением высоты сечения к его ширины равное двум и двутавровое. Сравнить выбранные сечения на экономичность по расходу материала.

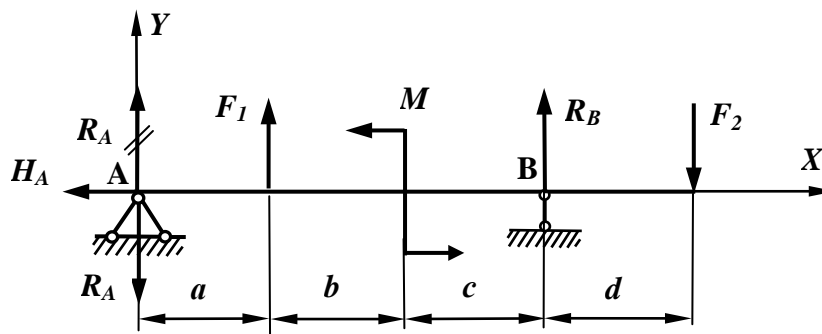


Рисунок 1– Схема балки

Исходные данные для расчета

- Сосредоточенные силы:  $F_1 = 8 \text{ кН}$ ;  $F_2 = 5 \text{ кН}$ .
- Момент пары сил  $M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .
- Длины участков балки:  $a = 2 \text{ м}$ ;  $b = 0,5 \text{ м}$ ;  $c = 1,5 \text{ м}$ ;  $d = 1 \text{ м}$ .

##### Решение

Решение задачи начинаем с определения опорных реакций. Для этого составляем уравнения статического равновесия.

$$\sum M_A = F_1 \cdot a + M + R_B(a + b + c) - F_2(a + b + c + d) = 0.$$

В этом уравнении одна неизвестная реакция  $R_B$ . Найдем её.

$$\begin{aligned} R_B &= \frac{-F_1 \cdot a - M + F_2(a + b + c + d)}{a + b + c} = \\ &= \frac{-8 \cdot 2 - 4 + 5(2 + 0,5 + 1,5 + 1)}{2 + 0,5 + 1,5} = 1,25 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Аналогично составим сумму моментов всех сил относительно второй опоры.

$$\sum M_B = -R_A(a + b + c) - F_1(b + c) + M - F_2 \cdot d = 0.$$

Отсюда найдем вторую опорную реакцию.

$$R_A = \frac{-F_1(b+c) + M - F_2 \cdot d}{a+b+c} =$$

$$= \frac{-8(0,5+1,5) + 4 - 5 \cdot 1}{2+0,5+1,5} = -4,25 \text{ кН.}$$

Знак минус реакции  $R_A$  означает, что этот вектор направлен в противоположную сторону. Выполним исправление направления реакции  $R_A$ , для чего зачеркнем первоначальное направление вектора на схеме и укажем правильное направление.

Горизонтальная реакция в шарнирно-неподвижной опоре  $A$  равна нулю, так как никаких активных сил в направлении оси  $X$  не действует.

$$\Sigma X = -H_A = 0; \quad \text{откуда } H_A = 0.$$

Для проверки правильности нахождения опорных реакций можно составить сумму проекций всех сил на ось  $Y$ .

$$\Sigma Y = R_A + F_1 + R_B - F_2 = -4,25 + 8 + 1,25 - 5 = 0.$$

Проверка подтверждает правильность выполненного решения.

Теперь определяем внутренние изгибающие моменты в сечениях балки с применением метода сечений. Для этого мысленно рассекаем каждый участок балки поочередно, отбрасываем одну часть, заменяем действие отброшенной части на оставшуюся внутренними силовыми факторами и составляем уравнение равновесия оставшейся части балки. При этом знак внутреннего изгибающего момента определяем в зависимости от знака кривизны балки: если балка под действием внутреннего момента изгибается выпуклостью вниз, такой момент считается положительным; в обратном случае – отрицательным. Кроме изгибающего момента в поперечных сечениях балки возникает также поперечная сила. Но влияние этого силового фактора на прочность балки не существенно, поэтому построение эпюры поперечных сил в данной теме не рассматривается.

Рассмотрим первый участок балки длиной  $a$  (рисунок 2). Рассечем этот участок в сечении с координатой  $x_1$  и отбросим правую часть балки. На оставшейся левой части балки действует только одна внешняя сила  $R_A$ , которая создает относительно рассматриваемого сечения момент с плечом  $x_1$ . Под действием этой силы точка  $A$  будет перемещаться в направлении силы, балка будет изгибаться выпуклостью вверх, как показано пунктиром на рисунке 2, а.

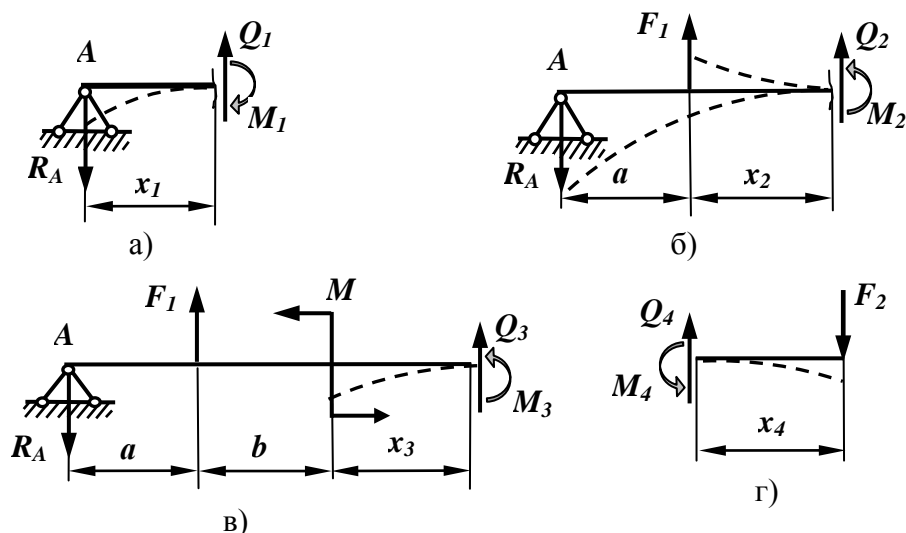


Рисунок 2 – Варианты изгиба упругой линии балки

В соответствии с правилом знаков момент от силы  $R_A$  будет отрицательным. Следовательно,

$$M_1 = -R_A \cdot x_1.$$

Здесь  $x_1$  может принимать значения в пределах длины первого участка, то есть

$$0 \leq x_1 \leq a.$$

Зададим крайние значения координаты  $x_1$  и определим соответствующие значения момента на границах первого участка.

$$\text{При } x_1 = 0 \quad M_1 = 0;$$

$$\text{при } x_1 = a = 2 \text{ м} \quad M_1 = -R_A \cdot a = -4,25 \cdot 2 = -8,5 \text{ кНм}.$$

Рассмотрим второй участок. После его рассечения в некотором сечении с координатой  $x_2$  и отбрасывания правой части, видно, что на оставшуюся часть действуют две внешние силы -  $R_A$  и  $F_1$  (рисунок 2, б). Реакция опоры А имеет плечо  $(a + x_2)$  и изгибает балку по-прежнему выпуклостью вверх, следовательно, изгибающий момент от этой реакции будет отрицательный. Сила  $F_1$  имеет плечо  $x_2$ , точка приложения силы будет перемещаться в направлении этой силы, т. е. вверх, следовательно, эта сила будет стремиться изгибать балку выпуклостью вниз, как указано на рисунке 2, б пунктиром. Знак изгибающего момента от этой силы получается положительный. Тогда внутренний момент на втором участке будет равен

$$M_2 = -R_A \cdot (a + x_2) + F_1 \cdot x_2, \text{ где } 0 \leq x_2 \leq b.$$

Задаем граничные значения координаты  $x_2$ .

$$\text{При } x_2 = 0 \quad M_2 = -R_A \cdot a = -4,25 \cdot 2 = -8,5 \text{ кНм};$$

$$\text{при } x_2 = b = 0,5 \text{ м}$$

$$M_2 = -R_A \cdot (a + b) + F_1 \cdot b = -4,25 \cdot 2,5 + 8 \cdot 0,5 = -6,625 \text{ кНм}.$$

Переходим к третьему участку. Рассекаем его в сечении с координатой  $x_3$  и отбрасываем правую часть (рисунок 2, в). На ставшейся части действуют

силы  $R_A$ ,  $F_1$  и пара сил с моментом  $M$ . Реакция опоры имеет плечо  $(a+b+x_3)$  и даст отрицательный момент. Сила  $F_1$  имеет плечо  $(b+x_3)$  и даст положительный момент. Пара сил с моментом  $M$  стремится поворачивать сечение, в котором она действует, против часовой стрелки, это приведет к изгибу балки выпуклостью вверх, что соответствует отрицательному знаку момента. Следовательно, внутренний момент на третьем участке будет равен

$$M_3 = -R_A \cdot (a + b + x_3) + F_1 \cdot (b + x_3) - M, \quad \text{где } 0 \leq x_3 \leq c.$$

Задаем граничные значения переменной.

$$\begin{aligned} \text{При } x_3 = 0 \quad M_3 &= -R_A \cdot (a + b) + F_1 \cdot b - M = \\ &= -4,25 \cdot 2,5 + 8 \cdot 0,5 - 4 = -10,625 \text{ кНм}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{при } x_3 = c \quad M_3 &= -R_A \cdot (a + b + c) + F_1 \cdot (b + c) - M = \\ &= -4,25 \cdot (2 + 0,5 + 1,5) + 8 \cdot (0,5 + 1,5) - 4 = -5 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

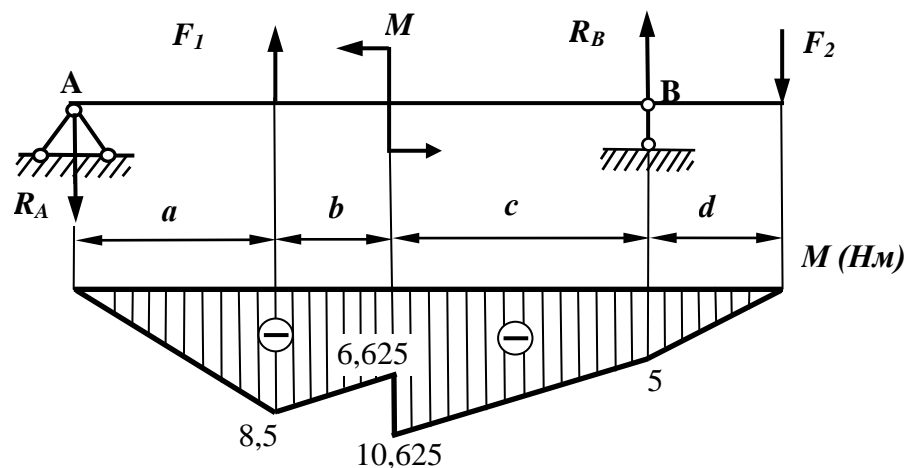
Рассмотрим последний четвертый участок. Метод сечений позволяет отбрасывать любую часть рассеченного бруса. Рассечем участок длиной  $d$  и отбросим теперь левую часть, оставив для рассмотрения более простую правую часть, на которой действует только одна сила  $F_2$  (рисунок 2, г). Эта сила имеет относительно рассматриваемого сечения плечо  $x_4$  и изгибает этот участок выпуклостью вверх. Следовательно, знак изгибающего момента будет отрицательный.

$$M_4 = -F_2 \cdot x_4, \quad \text{где } 0 \leq x_4 \leq d.$$

$$\text{При } x_4 = 0 \quad M_4 = 0.$$

$$\text{при } x_4 = d \quad M_4 = -F_2 \cdot d = -5 \cdot 1 = -5 \text{ кНм}.$$

Найденные значения изгибающих моментов откладываем на графике, который называется эпюрой изгибающих моментов и наглядно показывает характер распределения величин этих моментов вдоль оси балки. При этом обращаем внимание на то, что на первых трех участках использовалась правосторонняя система координат (т. е. начало координат находилось слева), а на последнем участке использовали левостороннюю систему, когда координата  $x_4$  измерялась справа. Полученная эпюра изгибающих моментов представлена на рисунке 3.





По эпюре наглядно видно, что опасным является сечение с изгибающим моментом 10,625 кНм. Проектный расчет балки выполняем по этому сечению. Условие прочности при изгибе выглядит так:

$$\sigma = \frac{M}{W_z} \leq [\sigma].$$

Для стальной балки допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ . Найдем осевой момент сопротивления.

$$W_z \geq \frac{M}{[\sigma]} = \frac{10,625 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 66,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 66,4 \text{ см}^3.$$

Из выражения осевого момента сопротивления для круглого сечения найдем диаметр сечения балки, удовлетворяющий условию прочности.

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} = 66,4 \text{ см}^3.$$

Отсюда диаметр  $d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_z}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 66,4}{3,14}} = 8,78 \text{ см}.$

Площадь круглого сечения будет равна

$$A_{кр} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 8,78^2}{4} = 60,5 \text{ см}^2.$$

Найдем сторону  $a$  квадратного сечения балки. Момент сопротивления квадратного сечения равен

$$W_z = \frac{a^3}{6} = 66,4 \text{ см}^3.$$

Отсюда  $a = \sqrt[3]{6 \cdot W_z} = \sqrt[3]{6 \cdot 66,4} = 7,36 \text{ см}.$

Тогда площадь квадратного сечения балки равна

$$A_{кв} = a^2 = 7,36^2 = 54,2 \text{ см}^2.$$

Определим размеры прямоугольного сечения с отношением высоты к ширине равным двум. Осевой момент сопротивления для прямоугольного сечения равен

$$W_z = \frac{b \cdot h^2}{6},$$

где  $b$  - ширина сечения,  $h$  – высота сечения.

С учетом заданного соотношения  $h/b = 2$  получаем

$$W_z = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{h/2 \cdot h^2}{6} = \frac{h^3}{12} = 66,4 \text{ см}^3.$$

Отсюда

$$h = \sqrt[3]{12 \cdot W_z} = \sqrt[3]{12 \cdot 66,4} = 9,27 \text{ см}.$$

Тогда

$$b = h/2 = 9,27/2 = 4,635 \text{ см}.$$

Следовательно, площадь прямоугольного сечения равно

$$A_{np} = b \cdot h = 4,635 \cdot 9,27 = 43 \text{ см}^2.$$

По таблице сортамента прокатной стали в соответствии с ГОСТ 8239-89 выбираем двутавр №14 с осевым моментом сопротивления  $W_z = 81,7 \text{ см}^3$  и площадью поперечного сечения  $A = 17,4 \text{ см}^2$ . Очевидно, что двутавровое сечение является наиболее экономичным с точки зрения расхода материала. Оценим расход материала для изготовления балок выбранных сечений, сравнивая площадь каждого сечения с площадью двутаврового сечения.

$$\frac{A_{кр}}{A_{дв}} = \frac{60,5}{17,4} = 3,48. \quad \frac{A_{кв}}{A_{дв}} = \frac{54,2}{17,4} = 3,11. \quad \frac{A_{np}}{A_{дв}} = \frac{43}{17,4} = 2,47.$$

С учетом выполненного сравнения площадей расставим их в порядке возрастания расхода материала: наиболее экономичным является двутавровое сечение, затем следует прямоугольное сечение, далее – квадратное, наименее экономичное – круглое сечение, на которое требуется в 3,5 раза больше стали, чем для двутавровой балки.

Для выполнения задачи №3 расчетная схема балки выбирается по рисунку из таблицы 3.1 согласно последней цифре шифра зачетной книжки студента, а значения параметров выбираются из таблицы 3.2 по предпоследней цифре шифра.

Таблица 3.1 - Варианты заданий для расчета балки на изгиб

<p>1</p>	<p>2</p>
<p>3</p>	<p>4</p>
<p>5</p>	<p>6</p>
<p>7</p>	<p>8</p>
<p>9</p>	<p>0</p>

Таблица 3.2 - Исходные данные для расчета балок на изгиб

№	$F_1, (кН)$	$F_2, (кН)$	$M, (кНм)$	$a, (м)$	$b, (м)$	$c, (м)$	$d, (м)$
1	6	5	4	1	2	1,5	3
2	4	6	3	2	3	2	1
3	5	8	4	3	1	2,5	2
4	8	3	5	2,5	2	3	1,5
5	10	4	8	0,5	1	1,5	2
6	9	6	10	1	1,5	3	2
7	7	9	8	2	1	3	2,5
8	6	4	9	3	2	1	1,5
9	8	5	6	1,5	2,5	1	3
0	5	6	8	2	1,5	3	1

### Список литературы

- 1 Иосилевич Г.Б. Прикладная механика: учебное пособие / Иосилевич Г.Б., Лебедев П.А., Стреляев В.С. – М.: Машиностроение, 2012. – 576 с.